Th.s Toán học - Ks Tin học LÊ HỒNG ĐỨC - Chủ biên
Nhà giáo ưu tú ĐÀO THIỆN KHẢI
LÊ BÍCH NGỌC
LÊ HỮU TRÍ

Để học tốt TOÁN 7

TẬP 2

Ta có :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}.\frac{a}{b}...\frac{a}{b}}_{\text{n thừa số}} = \frac{\overbrace{a.a...a}^{\text{n thừa số}}}{\underbrace{b.b...a}_{\text{n thừa số}}} = \frac{a^n}{b^n}$$

- Với Học sinh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo trình hoàn chỉnh về mặt kiến thức, dễ đọc, dễ hiểu.
- Với Thầy, Cô giáo và Phụ huynh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo án hoàn chỉnh về mặt kiến thức và có tính sư phạm để giảng dạy cơ bản và nâng cao theo tư tưởng đổi mới phương pháp dạy học.



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Th.s Toán học – Ks Tin học LÊ HỒNG ĐỨC – Chủ biên
Nhà giáo ưu tú ĐÀO THIỆN KHẢI
LÊ BÍCH NGỌC
LÊ HỮU TRÍ

ĐỂ HỌC TỐT

TOÁN 7

TẬP 2

- *Với Học sinh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo trình hoàn chỉnh về mặt kiến thức, dễ đọc, dễ hiểu.*
- *Với Thầy, Cô và Phụ huynh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo án hoàn chỉnh về mặt kiến thức và có tính sư phạm để giảng dạy cơ bản và nâng cao theo tư tưởng đổi mới phương pháp dạy học*

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỤC LỤC

Phần 1

Đại số

CHƯƠNG I - THỐNG KÊ

Thống kê mô tả là một bộ phận của khoa học thống kê, có nhiều ứng dụng rộng rãi trong các hoạt động của xã hội. Trong chương này, chúng ta sẽ bắt đầu làm quen với một số kiến thức cơ bản của thống kê mô tả.

1. **Thu thập số liệu thống kê - Tần số**
2. **Bảng tần số các giá trị của dấu hiệu**
3. **Biểu đồ**
4. **Số trung bình cộng**



THU THẬP SỐ LIỆU - TẦN SỐ BẢNG TẦN SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. THU THẬP SỐ LIỆU – BẢNG SỐ LIỆU THỐNG KÊ BAN ĐẦU

Để hiểu rõ hơn về quá trình thu thập số liệu, chúng ta xét thí dụ sau:

Thí dụ 1: Khi điều tra về chất lượng học tập của học sinh một trường THSC, người điều tra thu được kết quả và lập thành bảng dưới đây:

STT	Lớp	Số học sinh giỏi chiếm
1	6A	30%
2	6B	45%
3	6C	36%
4	7A	29%
5	7B	56%
6	7C	45%
7	8A	25%
8	8B	37%
9	8C	41%
10	9A	52%
11	9B	27%
12	9C	30%

Việc làm như trên của người điều tra là *thu thập số liệu* về vấn đề được quan tâm Như vậy, ta có định nghĩa:

> ***Thu thập số liệu** là việc ghi lại các số liệu về vấn đề được quan tâm. Các số liệu được ghi lại trong một bảng, gọi là **bảng thống kê ban đầu**.*

2. DẤU HIỆU – GIÁ TRỊ CỦA DẤU HIỆU

Từ thí dụ trên, ta nhận thấy:

- Vấn đề mà người điều tra quan tâm là số học sinh giỏi của mỗi lớp (tính theo phần trăm). Số học sinh giỏi của mỗi lớp là *dấu hiệu* hay *biến lượng*. Dấu hiệu thường được kí hiệu bằng các chữ cái in hoa X, Y, Z, ...
- Mỗi lớp là một *đơn vị điều tra*.
- Ứng với mỗi đơn vị điều tra có một số liệu, số liệu đó được gọi là *giá trị của dấu hiệu* bằng một kí hiệu (có thể là con số hay một hình nào đó).

Tóm lại:

Các số liệu thu thập được khi điều tra về một dấu hiệu gọi là số liệu thống kê. Mỗi số liệu là một giá trị của dấu hiệu..

Chú ý: Trong phạm vi lớp 7, chúng ta chỉ quan tâm đến những dấu hiệu (biến lượng) thể hiện trên từng phần tử điều tra bằng một số. Giá trị của các dấu hiệu có thể bằng nhau và đúng bằng số các đơn vị điều tra.

3. TẦN SỐ CỦA MỖI GIÁ TRỊ

Tiếp tục quan sát bảng 1, ta thấy:

- Số học sinh giỏi của lớp 6A và lớp 9C chiếm tỉ lệ là như nhau: 30%.
- Số học sinh giỏi của lớp 6B và lớp 7C chiếm tỉ lệ là như nhau: 45%.

Như vậy, mỗi giá trị có thể xuất hiện một hoặc nhiều lần trong dãy giá trị của dấu hiệu.

Từ đó, ta có định nghĩa:

Tần số của một giá trị là số lần lặp lại của mỗi giá trị đó trong bảng số liệu ban đầu. Kí hiệu: m.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Khi điều tra về "môn học mà bạn yêu thích nhất" đối với các bạn trong lớp, bạn Hoa thu được kết quả và lập thành bảng dưới đây:

Hóa học	Sinh học	Vật lý	Hóa học	Toán học
Văn học	Toán học	Hóa học	Sinh học	Địa lý
Anh văn	Vật lý	Anh văn	Văn học	Toán học
Địa lý	Lịch sử	Địa lý	Vật lý	Sinh học
Toán học	Văn học	Toán học	Lịch sử	Văn học

a. Có bao nhiêu bạn tham gia vào quá trình điều tra của bạn Hoa ?

b. Dấu hiệu ở đây là gì ?

c. Có bao nhiêu môn học được các bạn đưa ra ?

d. Tần số của mỗi môn học là như thế nào ?

Giải

a. Trong bản số liệu, ta thấy:

- Có 5 cột ;
- Mỗi cột có 5 hàng.

Vậy, trong quá trình điều tra của bạn Hoa có tất cả: $5 . 5 = 25$ bạn tham gia.

b. Ở đây, dấu hiệu là: *"Môn học mà bạn yêu thích nhất"*.

c. Có 8 môn học được các bạn đưa ra.

Đó là: Toán học, Vật lý, Hoá học, Anh văn, Văn học, Sinh học, Lịch sử, Địa lý.

d. Ta có:

- Môn Toán học có 5 bạn yêu thích.
- Môn Vật lý có 3 bạn yêu thích.
- Môn Hóa học có 3 bạn yêu thích.
- Môn Văn học có 4 bạn yêu thích.
- Môn Anh văn có 2 bạn yêu thích.
- Môn Sinh học có 3 bạn yêu thích.
- Môn Lịch sử có 2 bạn yêu thích.
- Môn Địa lý có 3 bạn yêu thích.

Ví dụ 2: Chọn 30 hộp kẹo một cách tùy ý trong kho của một cửa hàng và đem cân, kết quả được ghi lại trong bảng sau (khi đã trừ bao bì):

Khối lượng kẹo trong hộp (đơn vị: gam)		
200	199	202
200	201	201
199	199	200
198	200	199
201	202	198
200	198	201
202	200	200
200	199	198
199	200	199
200	200	201

Hãy cho biết:

a. Dấu hiệu cần tìm hiểu và số các giá trị của dấu hiệu đó.

b. Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu.

c. Các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số của chúng.

Giải

a. Ta có:

- Dấu hiệu cần tìm hiểu là: *"Số gam kẹo có trong hộp (đã trừ bao bì)"*
- Có 30 giá trị của dấu hiệu đó.

b. Có 5 giá trị khác nhau của dấu hiệu. Đó là: 198 ; 199 ; 200 ; 201 ; 202.

c. Trong 30 hộp kẹo, ta có:

- 4 hộp có khối lượng kẹo bằng 198 gam.
- 7 hộp có khối lượng kẹo bằng 199 gam.
- 11 hộp có khối lượng kẹo bằng 200 gam.
- 5 hộp có khối lượng kẹo bằng 201 gam.
- 3 hộp có khối lượng kẹo bằng 202 gam.

CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Thế nào là việc thu thập thống kê ? Bảng thống kê ban đầu được hình thành như thế nào ?

Câu hỏi 2: Dấu hiệu là gì ? Giá trị của dấu hiệu là gì ? Lấy ví dụ minh họa.

Câu hỏi 3: Nếu định nghĩa tần số của mỗi giá trị.

Câu hỏi 4: Lập bảng số liệu thống kê ban đầu cho một điều tra nhỏ về số điện năng tiêu thụ trong năm 2004 của nhà em.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Trong một đợt khám sức khỏe đầu năm của lớp 7A, người điều tra thu thập được bảng số liệu sau:

STT	Chiều cao của học sinh nam (cm)
1	154
2	156
3	152
4	156
5	148
6	151
7	153
8	150
9	156
10	152
11	151
12	153
13	154
14	152
15	152

Bảng 1

STT	Chiều cao của học sinh nữ(cm)
1	151
2	151
3	156
4	152
5	147
6	150
7	151
8	149
9	153
10	153
11	150
12	155
13	154
14	151
15	150

Bảng 2

Hãy cho biết:

a. Dấu hiệu cần tìm hiểu (cả hai bảng).

b. Số các giá trị của dấu hiệu đó và số các giá trị khác nhau của dấu hiệu (của từng bảng).

c. Các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số của chúng (của từng bảng).

Bài tập 2. Khi điều tra về chỉ số nước tiêu thụ của một khu nhà tập thể, người điều tra thu được kết quả và lập thành bảng dưới đây:

30 m^3	31 m^3	45 m^3	60 m^3	50 m^3
35 m^3	30 m^3	53 m^3	35 m^3	50 m^3
44 m^3	50 m^3	30 m^3	45 m^3	40 m^3
32 m^3	39 m^3	32 m^3	30 m^3	35 m^3
35 m^3	31 m^3	45 m^3	33 m^3	45 m^3

a. Có bao nhiêu hộ gia đình trong khu nhà tập thể đó ?

b. Dấu hiệu ở đây là gì ?

c. Số các giá trị của dấu hiệu đó và số các giá trị khác nhau của dấu hiệu.

d. Các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số của chúng.

Bài tập 3. Chọn 30 hộp bánh một cách tùy ý trong kho của một cửa hàng và đem đánh giá chất lượng, kết quả được ghi lại trong bảng sau:

Chất lượng bánh trong hộp		
A	C	A
A	A	C
B	B	A
C	A	B
A	B	C
C	B	C
B	C	A
B	C	B
C	A	C
A	B	C

Hãy cho biết:

a. Dấu hiệu cần tìm hiểu và số các giá trị của dấu hiệu đó.

b. Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu.

c. Các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số của chúng.

IV. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài tập 1:

a. Dấu hiệu cần tìm hiểu là: " *Chiều cao của học sinh lớp 7A* "

b. Ta có:

- Trong bảng 1: có 15 giá trị và 7 giá trị khác nhau của dấu hiệu đó.
- Trong bảng 2: có 15 giá trị và 9 giá trị khác nhau của dấu hiệu đó.

c. Trong bảng 1 có:

- 1 bạn cao 148 cm.
- 1 bạn cao 150 cm.
- 2 bạn cao 151 cm.
- 4 bạn cao 152 cm.
- 2 bạn cao 153 cm.
- 2 bạn cao 154 cm.
- 3 bạn cao 156 cm.

Trong bảng 2 có:

- 1 bạn cao 147 cm.
- 1 bạn cao 149 cm.
- 3 bạn cao 150 cm.
- 4 bạn cao 151 cm.
- 1 bạn cao 152 cm.
- 2 bạn cao 153 cm.
- 1 bạn cao 154 cm.
- 1 bạn cao 155 cm.
- 1 bạn cao 156 cm.

Bài tập 2:

a. Có 25 hộ gia đình trong khu nhà tập thể đó.

b. Dấu hiệu cần tìm hiểu là: " *Chỉ số nước tiêu thụ* ".

c. Có 25 giá trị và số 12 giá trị khác nhau của dấu hiệu đó.

d. Ta có:

- Có 4 hộ tiêu thụ 30 m^3 nước.
- Có 2 hộ tiêu thụ 31 m^3 nước.
- Có 2 hộ tiêu thụ 32 m^3 nước.
- Có 1 hộ tiêu thụ 33 m^3 nước.
- Có 4 hộ tiêu thụ 35 m^3 nước.

- Có 1 hộ tiêu thụ 39 m^3 nước.
- Có 1 hộ tiêu thụ 40 m^3 nước.
- Có 1 hộ tiêu thụ 44 m^3 nước.
- Có 4 hộ tiêu thụ 45 m^3 nước.
- Có 3 hộ tiêu thụ 50 m^3 nước.
- Có 1 hộ tiêu thụ 53 m^3 nước.
- Có 1 hộ tiêu thụ 60 m^3 nước.

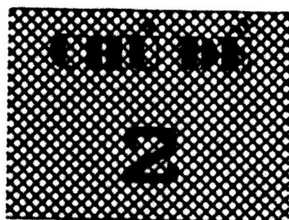
Bài tập 3:

a. Dấu hiệu cần tìm hiểu là: " *Chất lượng bánh trong hộp* "

b. Có 5 giá trị khác nhau của dấu hiệu. Đó là: A, B, C

c. Ta có:

- Có 10 hộp bánh có chất lượng A.
- Có 9 hộp bánh có chất lượng B.
- Có 11 hộp bánh có chất lượng C.



BẢNG TẦN SỐ CÁC GIÁ TRỊ CỦA DẤU HIỆU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bảng tần số các giá trị của dấu hiệu hay bảng phân phối thực nghiệm của một dấu hiệu X thường có dạng:

Giá trị của X	Tần số tương ứng
x_1	m_1
x_2	m_2
x_3	m_3
...	...
x_k	m_k
	Tổng số n = ...

hoặc có dạng:

x_1	x_2	X_3	...	x_{k-1}	x_k
m_1	m_2	M_3	...	m_{k-1}	m_k

Chú ý: Từ nay, nếu không nói gì thêm thì ta sẽ gọi bảng tần số các giá trị của dấu hiệu là bảng tần số.

Thí dụ 2: Từ bảng số liệu thống kê ban đầu (bảng 1) ta có bảng tần số sau:

Giá trị (X)	Tần số (m)
25%	1
27%	1
29%	1
30%	2
36%	1
37%	1
41%	1
45%	2
52%	1
56%	1

Nhận xét:
1. Từ bảng số liệu thống kê ban đầu ta có thể lập bảng tần số.
2. Bảng tần số giúp người điều tra dễ dàng đưa ra các nhận xét. .

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Khi điều tra về "môn học mà bạn yêu thích nhất" đối với các bạn trong lớp, Hoa đã ghi lại bảng bảng điều tra ban đầu như sau:

Hóa học	Sinh học	Vật lý	Hóa học	Toán học
Văn học	Toán học	Hóa học	Sinh học	Địa lý
Anh văn	Vật lý	Anh văn	Văn học	Toán học
Địa lý	Lịch sử	Địa lý	Vật lý	Sinh học
Toán học	Văn học	Toán học	Lịch sử	Văn học

Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm và có nhận xét gì trong quá trình điều tra.

Giải

Ta có bảng phân phối thực nghiệm như sau:

STT	Môn học	Tần số
1	Toán học	5
2	Vật lý	3
3	Hóa học	3
4	Văn học	4
5	Anh văn	2
6	Sinh học	3
7	Lịch sử	2
8	Địa lý	3

Từ bảng trên, ta thấy: Có nhiều bạn yêu thích môn Toán nhất và có ít bạn thích học môn Anh và môn Sử.

Ví dụ 2: Điều tra 100 gia đình trong một khu vực dân cư, người ta có bảng số liệu sau:

2	1	6	4	2	7	3	5	1	8
5	1	4	4	2	5	3	5	2	7
3	1	4	5	2	3	1	5	2	8
4	3	6	5	8	6	5	6	4	4
2	4	3	5	8	7	1	6	2	2
2	3	2	1	6	2	2	2	6	2
1	3	2	3	2	2	2	4	4	2
3	5	1	3	1	5	6	7	3	3
3	6	8	5	3	5	6	1	3	3
1	8	7	4	4	6	1	8	5	5

a. Dấu hiệu là gì ?

b. Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm cùng tần số các giá trị của dấu hiệu đó.

Giải

a. Dấu hiệu:

"Số con trong gia đình trong khu vực"

b. Lập bảng phân phối thực nghiệm:

Số con trong 1 gia đình	**Tần số**
1	13
2	20
3	17
4	12
5	15
6	11
7	5
8	7
	Tổng số = 100

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Bảng tần số là gì ? Bảng tần số có mấy dạng ?

Câu hỏi 2: Từ bảng thống kê ban đầu có lập được bảng phân phối thực nghiệm không ?

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Để khảo sát kết quả học Toán của trường, người ta chọn ra một lớp bất kì để làm bài kiểm tra. Kết quả kiểm tra như sau:

3	4	10	9	10
5	6	9	8	10
8	8	5	7	5
5	3	8	4	8
6	5	7	6	9
7	9	6	7	6
9	6	9	5	7
10	8	7	6	9
8	10	3	8	7
7	7	5	9	6

a. Từ cuộc điều tra trên, hãy nêu dấu hiệu là gì ?

b. Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm cùng tần số các giá trị của mỗi dấu hiệu đó.

Bài tập 2. Năng suất lao động của công nhân trong một xí nghiệp bánh kẹo như sau (hộp/ngày):

10	12	14	11	15
12	13	15	15	11
15	12	12	12	13
12	15	15	12	14
13	11	10	14	12

a. Từ cuộc điều tra trên, hãy nêu dấu hiệu là gì ?

b. Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm cùng tần số các giá trị của mỗi dấu hiệu đó và nêu ra một vài nhận xét.

Bài tập 3. Cho bảng tần số:

Giá trị	10	20	30	40	50	
Tần số	5	9	7	3	6	n = 30

Hãy viết lại bảng số liệu ban đầu với số liệu từ bảng trên.

V. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài tập 1:

a. Dấu hiệu cần điều tra: " *Chất lượng học tập của học sinh* "

b. Ta có bảng phân phối thực nghiệm:

Điểm số	**Tần số**
3	3
4	2
5	7
6	8
7	9
8	8
9	8
10	5
	Tổng số = 50

Bài tập 2:

a. Dấu hiệu cần điều tra: "*Năng suất* làm việc của công nhân"

b. Ta có bảng phân phối thực nghiệm:

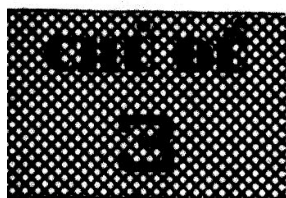
Hộp / ngày	Tần số
10	2
11	4
12	7
13	3
14	3
15	6
	Tổng số = 25

Từ bảng trên, ta thấy:

- Có 6 trên 25 công nhân làm được 15 hộp bánh một ngày, chiếm tỉ lệ cao.
- Số công nhân làm được 10, 13, 14 hộp / ngày chiếm tỉ lệ thấp.

Bài tập 3: Từ bảng tần số, ta có bảng số liệu ban đầu như sau:

10	20	30
30	40	50
50	10	20
20	30	30
30	20	50
40	10	20
20	20	10
50	50	20
50	10	30
20	30	40



BIỂU ĐỒ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để có hình ảnh rõ ràng về biến lượng X người ta còn dùng các biểu đồ. Chẳng hạn như biểu đồ đoạn thẳng, biểu đồ chữ nhật, biểu đồ hình quạt, biểu đồ đường gấp khúc ...

1. BIỂU ĐỒ ĐOẠN THẲNG

Trước tiên, ta xét thí dụ sau:

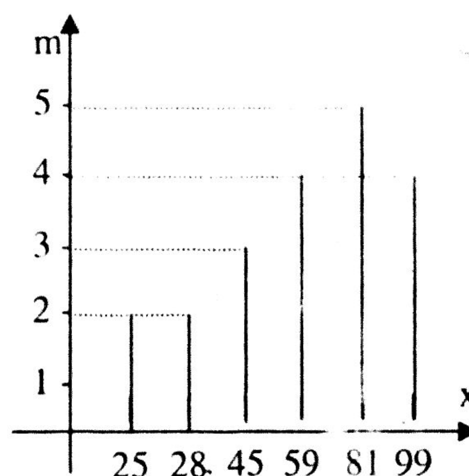
Thí dụ 1: Cho bảng tần số:

Giá trị x	25	45	28	59	81	99	
Tần số m	2	3	2	4	5	4	n = 20

Hãy lập biểu đồ đoạn thẳng để biểu diễn các số liệu trên.

Giải

Ta thực hiện theo các bước sau:



Bước 1: Dựng hệ trục toạ độ. Trên đó, trục hoành biểu diễn các giá rị x, trục tung biểu diễn tần số m.

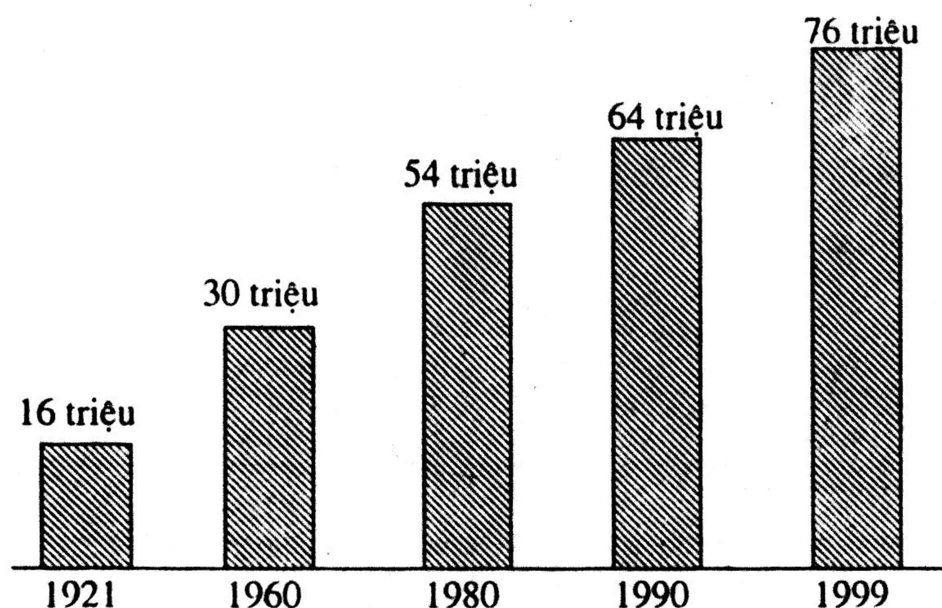
Bước 2: Xác định các điểm có toạ độ là cặp số gồm giá trị và tần số của nó. Ở đây, ta được: (25, 2) ; (45, 3) ; (28, 2) ; (59, 4); (81, 5) ; (99, 4).

Bước 3: Từ điểm đó kẻ đường thẳng vuông góc với trục hoành.

Chú ý: Nếu ta thay các đoạn thẳng bằng các hình chữ nhật thì ta được một loại biểu đồ mới. Đó là, biểu đồ hình chữ nhật.

2. BIỂU ĐỒ HÌNH CHỮ NHẬT

Thí dụ 2: Biểu đồ dân số Việt Nam qua tổng điều tra trong thế kỉ XX



Chú ý: Khi vẽ biểu đồ chữ nhật, ta có thể vẽ tách rời các hình chữ nhật ra hoặc vẽ sát vào nhau để tiện cho việc so sánh.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Trong hồ sơ khảo sát của đài khí tượng thủy văn năm 2004 có ghi lại nhiệt độ trung bình của từng tháng như sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t^0	18	20	24	28	30	31	32	31	28	25	18	17

a. Hãy lập bảng tần số.

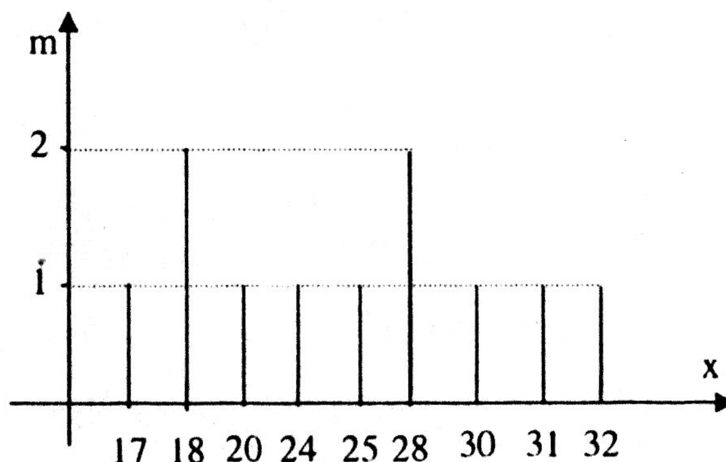
b. Hãy biểu diễn bằng biểu đồ đoạn thẳng.

Giải

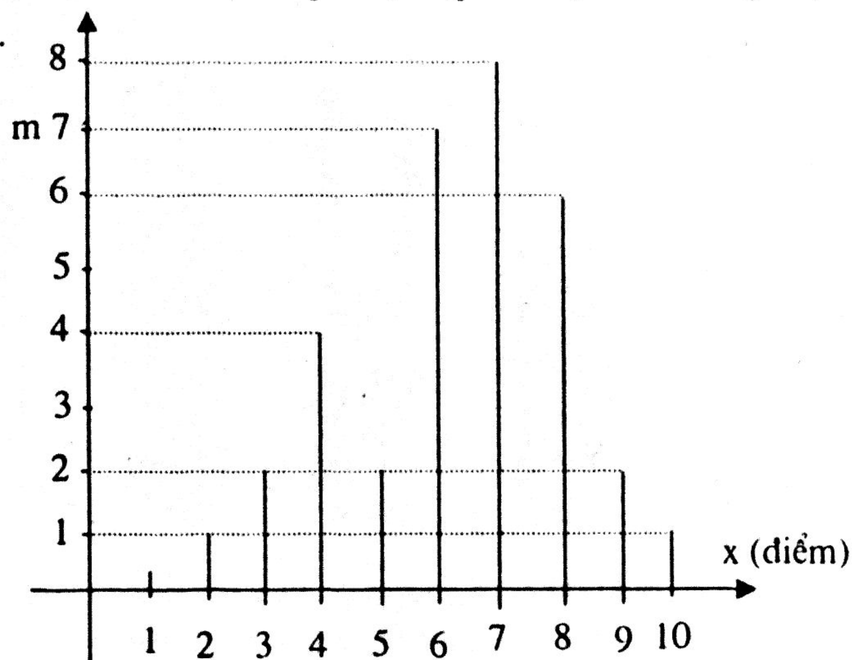
a. Ta có, bảng tần số:

Giá trị	17	18	20	24	25	28	30	31	32	
Tần số	1	2	1	1	1	2	1	2	1	n = 12

b. Biểu đồ đoạn thẳng



Ví dụ 2: Cho biểu đồ biểu diễn kết quả học tập của học sinh trong một lớp qua một bài kiểm tra.



Từ biểu đồ trên hãy:

a. Nhận xét sơ bộ về tình hình học tập của lớp.

b. Lập bảng tần số.

Giải

a. Từ biểu đồ trên, ta có một số nhận xét sau:

- Tình hình học tập của lớp ở mức khá.
- Không có bạn nào bị điểm 1 song vẫn có bạn bị điểm dưới trung bình.
- Tỉ lệ đạt điểm 6, 7, 8 là khá cao.

b. Lập bảng tần số

Giá trị	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số	0	1	2	4	2	7	8	6	2	1	n = 32

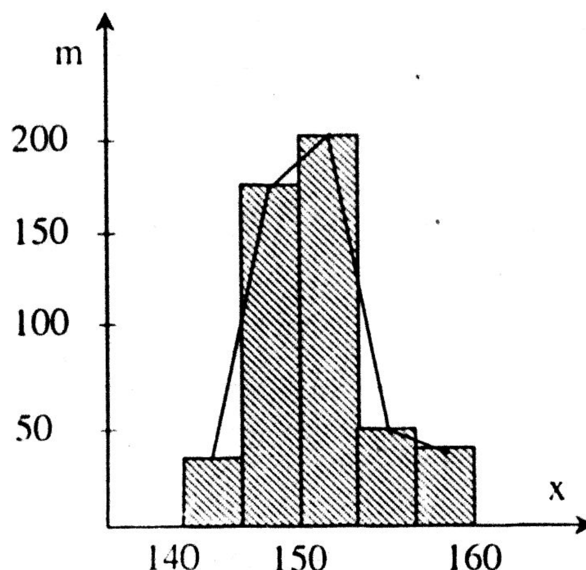
Ví dụ 3: Để kiểm tra sức khoẻ của một trường trung học cơ sở có 500 học sinh. Người điều tra đã thống kê về chiều cao của các em thông qua bảng sau:

Chiều cao (tính theo cm)	**Giá trị trung tâm**	**Tần số**
140 - 144	142	35
144 - 150	146	175
150 - 154	152	200
154 - 158	156	50
158 - 160	159	40
		Tổng số = 500

Hãy lập biểu đồ chữ nhật để biểu diễn các số liệu trên

Giải

Lập biểu đồ chữ nhật



III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu các bước vẽ biểu đồ đoạn thẳng.

Câu hỏi 2: Vẽ biểu đồ hình chữ nhật như thế nào ?

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Trong đợt hè vừa qua, nhà trường tổ chức hoạt động trồng cây gây rừng. Kết quả thu được như sau:

Lớp	7A	7B	7C	7D
Số cây trồng	15	17	12	18

Hãy vẽ biểu đồ hình chữ nhật để biểu diễn kết quả trên.

Bài tập 2. Lượng mưa trung bình hàng tháng trong năm 2004 ở Hà Nội được trạm khí tượng thuỷ văn ghi lại trong bảng dưới đây (đo theo mm và làm tròn đến mm):

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lượng mưa	30	30	30	40	80	80	120	150	100	50	40	30

Hãy vẽ biểu đồ đoạn thẳng và nhận xét

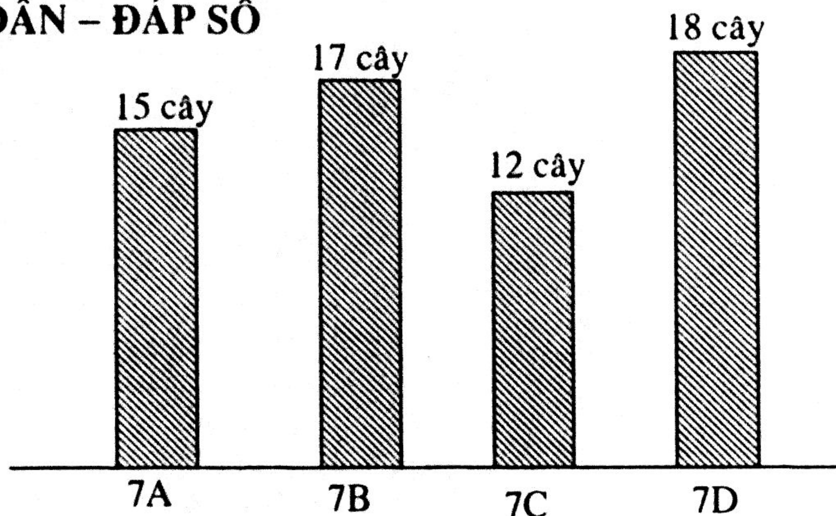
Bài tập 3. Diện tích đất rừng ở nước ta ngày càng bị thu hẹp. Theo thống kê từ năm 1995 đến 1998, mỗi năm số diện tích đất rừng bị tàn phá như sau (đơn vị: nghìn ha)

Năm	1995	1996	1997	1997
Diện tích	25	10	15	18

Hãy vẽ biểu đồ hình chữ nhật để biểu diễn kết quả trên.

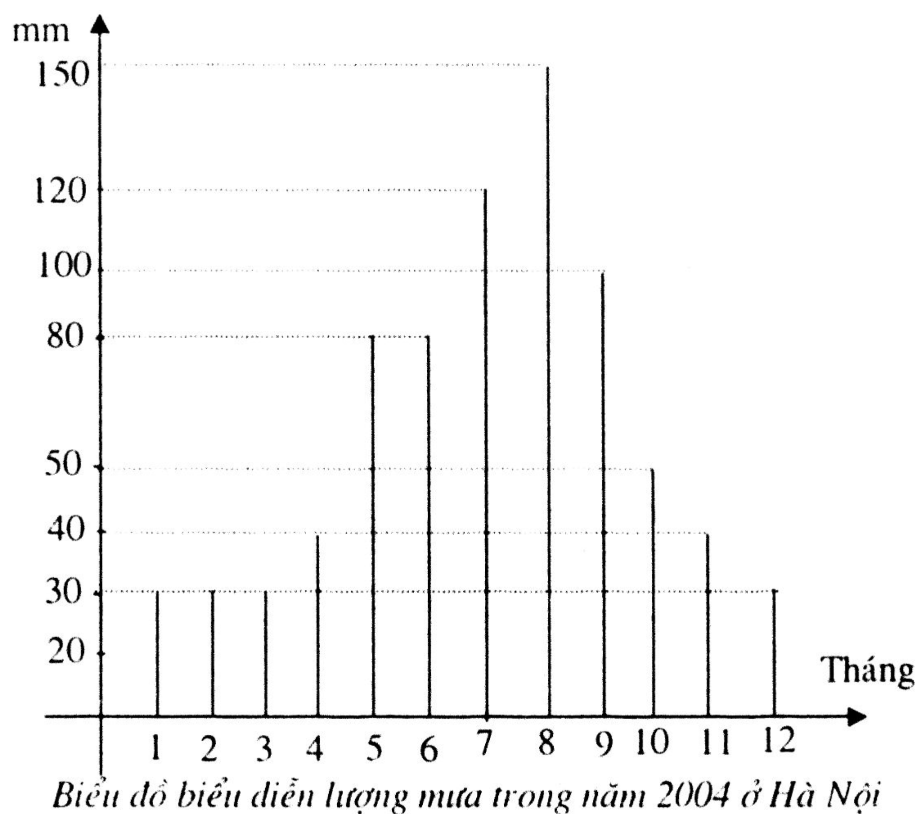
V. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài tập 1:



Biểu đồ biểu diễn số cây trồng trong dịp hè của khối 7

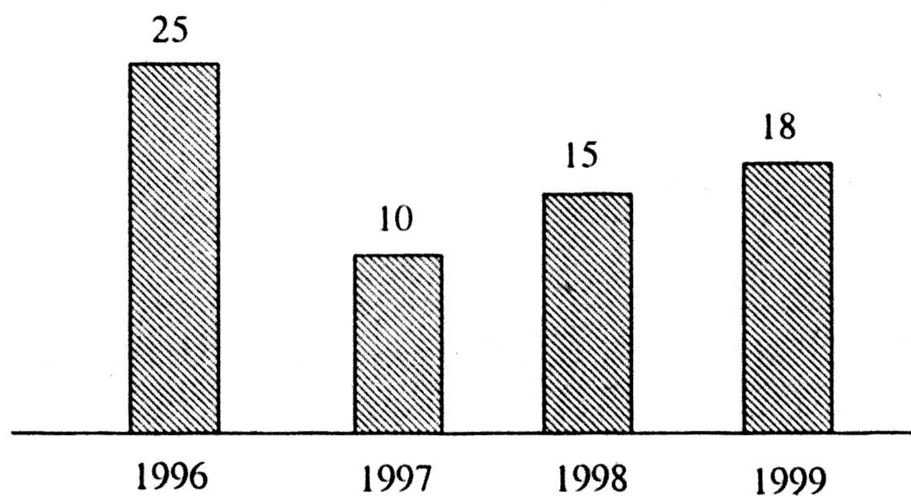
Bài tập 2:



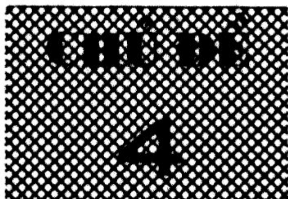
Biểu đồ biểu diễn lượng mưa trong năm 2004 ở Hà Nội

Từ biểu đồ trên ta có nhận xét: ở khu vực Hà Nội, lượng mưa lớn nhất là vào tháng 8 và trời khá hanh khô vào cuối năm và đầu năm.

Bài tập 3:



Biểu đồ biểu diễn diện tích đất rừng bị phá.



SỐ TRUNG BÌNH CỘNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG CỦA DẤU HIỆU

Thí dụ 1: Các điểm Toán của Cu Tí như sau: 8, 7, 9, 5, 6, 8, 10, 7, 6, 7

Từ đó, ta có bảng tần số:

Điểm số (x)	Tần số (m)
5	1
6	2
7	3
8	2
9	1
10	1
	n = 10

Như vậy, điểm trung bình môn Toán của Cu Tí bằng:

$$(5.1 + 6.2 + 7.3 + 8.2 + 9.1 + 10.1):10 = 73 : 10 = 7,3.$$

Vậy; 7,3 là giá trị trung bình của dấu hiệu.

Từ đó, ta có định nghĩa:

> Giá trị trung bình của một dấu hiệu là trung bình cộng các giá trị của dấu hiệu đó. *Kí hiệu: Giá trị trung bình của* dấu hiệu *X là* $\overline{X}$.

2. CÔNG THỨC TÍNH SỐ TRUNG BÌNH CỘNG CỦA DẤU HIỆU

Từ cách tính ở thí dụ trên, ta có một số nhận xét sau:

Nhận xét: Dựa vào bảng tần số, ta có thể tính số trung bình cộng của một dấu hiệu như sau:

1. Nhân từng giá trị với tần số tương ứng.
2. Cộng tất cả các tích vừa tìm được.
3. Chia tổng đó cho số các giá trị (hay tổng các tần số).

Vậy, ta có thể sử dụng ngay công thức khi đã có bảng thực nghiệm:

$$\overline{X} = \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + ... + x_kn_k}{n}$$

trong đó:

- $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.
- $x_1, x_2, ... , x_k$ là k giá trị khác nhau của dấu hiệu X.
- $n_1, n_2, ... , n_k$ là k tần số tương ứng.

Như vậy, trong thí dụ trên, ta có bảng sau:

Điểm số (x)	Tần số (n)	Tích x.n	
5	1	5	
6	2	12	
7	3	21	
8	2	16	
9	1	9	
10	1	10	
	N = 10	Tổng:73	$\overline{X} = \frac{73}{10} = 7,3$

3. Ý NGHĨA CỦA SỐ TRUNG BÌNH CỘNG

Giá trị trung bình được dùng để nhận định chung về kết quả điều tra hoặc so sánh giữa các dấu cùng loại với nhau. Chẳng hạn, muốn so sánh kết quả học tập môn Toán của bạn Tí và bạn Tèo, ta phải tính điểm trung bình môn Toán của hai bạn rồi lấy kết quả đó so sánh với nhau.

Tóm lại:

Số trung bình cộng thường được dùng làm đại diện cho dấu hiệu, đặc biệt là khi muốn so sánh các dấu hiệu cùng loại.

Chú ý:

1. Khi các giá trị của biến lượng có sự chênh lệch quá lớn thì giá trị trung bình không thể đại diện cho biến lượng mà phải kết hợp cùng những số khác.
2. Số trung bình cộng có thể không thuộc dãy giá trị của dấu hiệu.

4. MỐT CỦA DẤU HIỆU

Thí dụ 2: Một cửa hàng bán bánh kẹo ghi lại loại bánh đã bán trong một tháng theo các mã khác nhau:

Mã bánh	A	B	C	D	
Số lượng	150	50	32	18	N = 250

Điều mà cửa hàng quan tâm là "*Loại bánh nào được người tiêu dùng ưa chuộng nhất*". Trong trường hợp này, do giá trị của dấu hiệu chênh lệch khá lớn nên loại bánh có mã là A sẽ là đại diện chứ không phai là số trung bình cộng của dấu hiệu. Như vậy, mã bánh A với tần số lớn nhất được gọi là ***mốt***.

Tóm lại:

> *Mốt của dấu hiệu là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng tần số.*
> *Kí hiệu:* M_0.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Điều tra 100 gia đình chọn ra từ 800 gia đình trong một khu vực dân cư, người ta có bảng phân phối thực nghiệm sau:

X_i	m_i
1	13
2	20
3	17
4	12
5	15
6	11
7	5
8	7
	Tổng số = 100

Tìm giá trị trung bình $\overline{X}$ của biến lượng

Giải

Áp dụng công thức, ta được:

$$\overline{X} = \frac{1.13 + 2.20 + 3.17 + 4.12 + 5.15 + 6.11 + 7.5 + 8.7}{100} = \frac{380}{4} = 3,84$$

Ví dụ 2: Ta có bảng phân phối thực nghiệm sau:

Điểm số mỗi lần bắn (X_i)	m_i
10	25
9	20
8	31
7	8
6	10
5	6
	Tổng số = 100

Tìm giá trị trung bình $\overline{X}$ của biến lượng

Giải

Áp dụng công thức, ta được:

$$\overline{X} = \frac{10.25 + 9.20 + 8.31 + 7.8 + 6.10 + 5.6}{100} = \frac{824}{100} = 8,24$$

__Ví dụ 3:__ Chứng minh rằng:

"Nếu cộng các giá trị của biến lượng với cùng một số thì số trung bình của biến lượng cũng được cộng với số đó".

Giải

Giả sử:

- $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ là các giá trị của biến lượng.
- $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k$ là các tần số tương ứng.

Ta có: $n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k$. $\Rightarrow \overline{X} = \dfrac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \ldots + x_km_k}{n}$

Giả sử a là số được cộng thêm vào mỗi biến lượng

Vậy giá trị của các biến lượng là: $(x_1 + a), (x_2 + a), (x_3 + a), \ldots, (x_k + a)$.

Khi đó:

$$\overline{X_1} = \frac{(x_1 + a)m_1 + (x_2 + a)m_2 + (x_3 + a)m_3 + \ldots + (x_k + a)m_k}{n}$$

$$= \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \ldots + x_km_k + (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_k)a}{n}$$

$$= \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \ldots + x_km_k + na}{n}$$

$$= \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \ldots + x_km_k}{n} + a = \overline{X} + a \text{ (đpcm)}$$

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Số trung bình cộng là gì ? Nêu công thức tính.

Câu hỏi 2: Số trung bình cộng dùng để là gì ? Trong trường hợp nào không được sử dụng số trung bình cộng để làm đại diện ?

Câu hỏi 3: Mốt của dấu hiệu là gì ?

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính trung bình cộng của 10 thùng hàng. Trong đó có 3 thùng nặng 5 kg; 2 thùng nặng 6 kg; 4 thùng nặng 7,5 kg; 3 thùng nặng 8 kg và 1 thùng nặng 9 kg

Bài tập 2. Người ta điều tra trên 8 phần tử, các thông số nhận được là: 15, 30, 25, 45, 35, 40, 45, 50.

a. Tính tần số của mỗi thông số.

b. Tính giá trị trung bình của một biến lượng.

Bài tập 3. Người ta kiểm tra 10 em học sinh để đánh giá chất lượng học tập chung của cả lớp. Điểm mà các em đó đạt được như sau: 9, 4, 6, 5, 10, 6, 8, 4, 8, 9.

a. Tính tần số của mỗi thông số.

b. Lập bảng phân phối thực nghiệm.

c. Tính giá trị trung bình của một biến lượng.

Bài tập 4. Chứng minh rằng:

" Nếu trừ các giá trị của biến lượng với cùng một số thì số trung bình của biến lượng cũng được trừ với số đó ".

V. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài tập 1: Ta có, bảng phân phối thực nghiệm sau:

Trọng lượng	Tần số (m)	Tích x.m	
5	3	15	
6	2	12	
7,5	4	30	
8	3	24	
9	1	9	
	N = 10	Tổng: 90	$\overline{X} = \frac{90}{10} = 9$

Vậy trung bình cộng của 10 thùng hàng là 9 kg.

Bài tập 2: Ta có, bảng phân phối thực nghiệm sau:

Thông số	Tần số (m)	Tích x.m	
15	1	15	
25	1	25	
30	1	30	
35	1	35	
40	1	40	
45	2	90	
50	1	50	
	N = 8	Tổng: 240	$\overline{X} = \frac{240}{8} = 30$

Vậy trung bình cộng của các thông số là 30.

Bài tập 3: Ta có, bảng phân phối thực nghiệm sau:

Điểm số	Tần số (m)	Tích x.m	
4	2	8	
5	1	5	
6	2	12	
8	2	16	
9	2	18	
10	1	10	
	N = 10	Tổng: 69	$\overline{X} = \frac{69}{10} = 6,9$

Vậy trung bình cộng điểm của các em học sinh là 6,9.

Bài tập 4:

Giả sử:

- $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ là các giá trị của biến lượng.
- $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k$ là các tần số tương ứng.

Ta có: $n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k$.

$$\overline{X} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \ldots + x_km_k}{n}$$

Giả sử a là số được trừ đi ở mỗi biến lượng

Vậy giá trị của các biến lượng là: $(x_1 - a), (x_2 - a), (x_3 - a), \ldots, (x_k - a)$.

$$\Rightarrow \overline{X}_1 = \frac{(x_1 - a)m_1 + (x_2 - a)m_2 + (x_3 - a)m_3 + \ldots + (x_k - a)m_k}{n}$$

$$= \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \ldots + x_km_k + (m_1 - m_2 - \ldots - m_k)a}{n}$$

$$= \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \ldots + x_km_k - na}{n}$$

$$= \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \ldots + x_km_k}{n} - a = \overline{X} - a \text{ (đpcm)}$$

CHƯƠNG II - BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Trong chương này chúng ta sẽ xem xét các vấn đề sau:

1. **Khái niệm về biểu thức đại số**
2. **Giá trị của một biểu thức đại số**
3. **Đơn thức**
4. **Đơn thức đồng dạng**
5. **Đa thức**
6. **Cộng, trừ đa thức**
7. **Đa thức một biến**
8. **Cộng, trừ đa thức một biến**
9. **Nghiệm của đa thức một biến**



KHÁI NIỆM VỀ BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. BIỂU THỨC SỐ

Thí dụ 1: Ta gọi: $6 + 8 - 1$, $3.6^2 - 3$, $8:3 + 11$, ...

là các biểu thức số. Như vậy, ta có thể định nghĩa:

> *Các số được nối với nhau bởi các phép tính (cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa) được gọi là các biểu thức số.*

2. BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Thí dụ 2: Ta gọi: $2a + b - 1$, $3.x^2 - xy$, $c:3 + 11a$, ...

là các biểu thức đại số.

Trong biểu thức đại số, các chữ có thể đại diện cho những số tùy ý. Những chữ như vậy được gọi là *biến số* (gọi tắt là *biến*).

Như vậy, ta có thể định nghĩa:

> *Các biến được nối với nhau bởi các phép tính (cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa) được gọi là các biểu thức đại số.*

Thí dụ 3: Cho hình chữ nhật có hai cạnh liên tiếp bằng a và b.

a. Viết biểu thức tính chu vi của hình chữ nhật.

b. Viết biểu thức tính diện tích của hình chữ nhật.

Giải

a. Ta có chu vi hình chữ nhật (CV) được cho bởi: $CV = 2(a + b)$.

b. Ta có diện tích hình chữ nhật (S) được cho bởi: $S = ab$.

Chú ý:

1. Trong biểu thức đại số, người ta cũng dùng các dấu ngoặc để chỉ thứ tự thực hiện các phép tính.
2. Trong biểu thức đại số, vì các chữ đại diện cho số nên khi thực hiện các phép toán trên các chữ, ta có thể áp dụng những tính chất, quy tắc phép toán như trên các số. Thí dụ:
   - $x + y = y + x$, $xy = yx$ – *Tính chất giao hoán.*
   - $(x + y) + z = x + (y + z)$, $(xy)z = x(yz)$ – *Tính chất kết hợp.*
   - $(x + y)z = xz + yz$ – *Tính chất phân phối.*

- $xx = x^2$, $xxx = x^3$.
- $-(x-y+z) = -x + y - z$ – *Quy tắc đổi dấu.*
- ...

Thí dụ 4: Viết biểu thức đại số hiển thị:

a. Số giờ đi hết quãng đường AB dài x (km) của một người đi xe máy với vận tốc 30km/h.

b. Tổng quãng đường đi của một người, biết:

- Người đó đi bộ trong x giờ với vận tốc 5 km/h.
- Người đó đi xe đạp trong y giờ với vận tốc 12 km/h.
- Người đó đi xe máy trong z giờ với vận tốc 30 km/h.

Giải

a. Người đi xe máy đi quãng đường AB dài x km với vận tốc 30km/h mất: $\frac{x}{30}$ (giờ).

b. Ta có:

- Quãng đường người đó đi bộ trong x giờ với vận tốc 5 km/h là: 5.x (km).
- Quãng đường người đó đi xe đạp trong y giờ với vận tốc 12 km/h là: 12.y (km).
- Quãng đường người đó đi xe máy trong z giờ với vận tốc 30 km/h là: 30.z (km).

Vậy, tổng quãng đường đi của người đó là: $5x + 12y + 30z$ (km).

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Viết biểu thức đại số để diễn đạt các ý sau:

a. Tổng của a và b lập phương. b. Tổng các lập phương của a và b.

c. Lập phương của tổng a và b.

Giải

a. Ta có, tổng của a và b lập phương là: $a + b^3$.

b. Ta có, tổng các lập phương của a và b là: $a^3 + b^3$.

c. Ta có, lập phương của tổng a và b là: $(a + b)^3$.

Ví dụ 2: Sử dụng các thuật ngữ đã học để đọc các biểu thức sau:

a. $x^2 + 8$ b. $9x^3$ c. $(x-1)(x+1)$

Giải

a. Ta đọc $x^2 + 8$ là: " Tổng của x bình phương và 8 ".

b. Ta đọc $9x^3$ là: " Tích của 9 và x lập phương ".

c. Ta đọc $(x-1)(x+1)$ là: " Tích của hiệu hai số x và 1 với tổng của chúng ".

Ví dụ 3: Cho hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 6cm. Viết biểu thức tính diện tích của hình chữ nhật.

Giải

Cách 1: Giả sử hình chữ nhật có chiều rộng bằng x, suy ra chiều dài bằng x + 6.

Khi đó, diện tích hình chữ nhật (S) được cho bởi: $x(x + 6)$.

Cách 2: Giả sử hình chữ nhật có chiều dài bằng x, suy ra chiều rộng bằng x – 6.

Khi đó, diện tích hình chữ nhật (S) được cho bởi: $x(x - 6)$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa biểu thức số. Cho ví dụ.

Câu hỏi 2: Phát biểu định nghĩa biểu thức đại số. Cho ví dụ.

Câu hỏi 3: Trong biểu thức đại số ta có thể áp dụng những tính chất, quy tắc phép toán như trên các biểu thức số hay không ? Tại sao ?

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Viết biểu thức đại số để diễn đạt các ý sau:

a. Tổng của a bình phương và b lập phương.

b. Hiệu các lập phương của a và b.

c. Lập phương của hiệu a và b.

Bài tập 2. Sử dụng các thuật ngữ đã học để đọc các biểu thức sau:

a. $x^3 - 1$ b. $5 : x^2$ c. $(x + 8)(x - 2)$

Bài tập 3. Viết biểu thức tính diện tích của hình chữ nhật, biết hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 2cm.

Bài tập 4. Viết biểu thức tính diện tích của hình thang có đáy lớn bằng hai đáy nhỏ và đường cao là h.

Bài tập 5. Viết biểu thức đại số để diễn đạt các ý sau:

a. Một số khi chia cho 5 được thương là a và dư 1. Tổng của số đó với 2 thì chia cho 6 được thương là b và dư 2.

b. Một số khi chia cho 8 được thương là a và dư 5. Hiệu của số đó với 9 thì chia cho 11 được thương là b và dư 3.

Bài tập 6. Trong hoá đơn thu tiền điện của một hộ gia đình, chỉ số điện tiêu thụ là 250 số. Hỏi người đó phải trả bao nhiêu tiền nếu:

a. Hoá đơn được tính theo hệ số 1, nghĩa là:

- 100 số đầu tiên họ phải trả a đồng/1 số điện.

- 100 số tiếp theo họ phải trả b đồng/1 số điện.
- Và từ số 201 trở đi họ phải trả c đồng/1 số điện.

b. Hoá đơn được tính theo hệ số 2, nghĩa là:

- 50 số đầu tiên họ phải trả a đồng/1 số điện.
- 50 số tiếp theo họ phải trả b đồng/1 số điện.
- Và từ số 101 trở đi họ phải trả c đồng/1 số điện.

V. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Ta có, tổng của a bình phương và b lập phương là: $a^2 + b^3$.

b. Ta có, hiệu các lập phương của a và b là: $a^3 - b^3$.

c. Ta có, lập phương của tổng a và b là: $(a - b)^3$.

Bài tập 2.

a. Ta đọc $x^3 - 1$ là: "Hiệu của x lập phương và 1".

b. Ta đọc $5 : x^2$ là: "Thương của 5 và x bình phương".

c. Ta đọc $(x + 8)(x - 2)$ là: "Tích của tổng hai số x và 8 với hiệu hai số x và 2".

Bài tập 3.

Cách 1: Giả sử hình chữ nhật có chiều rộng bằng x, suy ra chiều dài bằng x + 2.

Do đó, biểu thức diện tích: $x(x + 2)$.

Cách 2: Giả sử hình chữ nhật có chiều dài bằng x, suy ra chiều rộng bằng x – 2.

Do đó biểu thức diện tích: $x(x - 2)$.

Bài tập 4.

Cách 1: Giả sử hình thang có đáy nhỏ bằng a, suy ra đáy lớn bằng 2a.

Khi đó, diện tích hình thang (S) được cho bởi: $\frac{(a + 2a)h}{2} = \frac{3}{2}ah$.

Cách 2: Giả sử hình thang có đáy lớn bằng a, suy ra đáy nhỏ bằng $\frac{a}{2}$.

Khi đó, diện tích hình thang (S) được cho bởi: $\frac{\left(a + \frac{a}{2}\right)h}{2} = \frac{3}{4}ah$

Bài tập 5.

a. Một số khi chia cho 5 được thương là a và dư 1. Vậy, số đó là: $5.a + 1$

Tổng của số đó với 2 thì chia cho 6 được thương là b và dư 2.

Ta được: $5.a + 1 + 2 = 6b + 2$.

b. Một số khi chia cho 8 được thương là a và dư 5. Vậy, số đó là: $8.a + 5$.

Hiệu của số đó với 9 thì chia cho 11 được thương là b và dư 3.

$$8.a + 5 - 9 = 11.b + 3$$

Bài tập 6.

a. Nếu hoá đơn được tính theo hệ số 1, ta có:

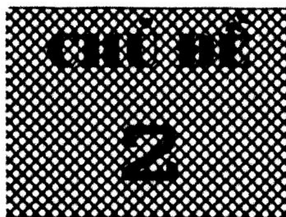
- Số tiền của 100 số đầu tiên là: 100a đồng.
- Số tiền của 100 số tiếp theo là: 100b đồng.
- Số tiền của 50 số tiếp theo là: 50c đồng.

Vậy, tổng số tiền họ phải trả là: 100a + 100b + 50c (đồng)

b. Nếu hoá đơn được tính theo hệ số 2, ta có:

- Số tiền của 50 số đầu tiên là: 50a đồng.
- Số tiền của 50 số tiếp theo là: 50b đồng.
- Số tiền của 150 số tiếp theo là: 150c đồng.

Vậy, tổng số tiền họ phải trả là: 50a + 50b + 150c (đồng)



GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Chúng ta bắt đầu với việc thay $a = \frac{3}{4}$ vào biểu thức $4a^2 + a - 1$, ta được:

$$4\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} - 1 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} - 1 = 2.$$

Khi đó, ta nói 2 là *giá trị của biểu thức* $4a^2 + a - 1$ tại $a = \frac{3}{4}$.

Như vậy, ta có:

Để tính giá trị của một biểu thức đại số tại những giá trị cho trước của các biến, ta thay các giá trị cho trước đó vào biểu thức rồi thực hiện các phép tính.

Thí dụ 1: Tính giá trị của biểu thức $x^2y + xy^2$ tại $x = 1$ và $y = \frac{1}{2}$.

Giải

Thay $x = 1$ và $y = \frac{1}{2}$ vào biểu thức đã cho, ta được:

$$1^2.\ \frac{1}{2} + 1.\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$$

Vậy, giá trị của biểu thức $x^2y + xy^2$ tại $x = 1$ và $y = \frac{1}{2}$ bằng $\frac{3}{4}$.

Chú ý: Để phát triển bài toán tính giá trị của biểu thức đại số, người ta thường yêu cầu chúng ta "*Xây dựng biểu thức rồi tính giá trị của biểu thức trong một hoặc nhiều trường hợp cụ thể*". Thí dụ sau sẽ minh họa điều này.

Thí dụ 2: Một vòi nước chảy vào một bể nước, mỗi phút được x lít. Cùng lúc đó một vòi nước khác chảy từ bể ra, mỗi phút chảy được một lượng nước bằng $\frac{1}{4}$ lượng nước chảy vào.

a. Hãy biểu thị số nước có thêm trong bể sau khi đồng thời mở cả hai vòi trên trong y phút.

b. Tính số nước có thêm trong bể trên, biết $x = 36$, $y = 60$.

Giải

a. Nhận xét rằng, lượng nước có thêm trong bể sau khi đồng thời mở cả hai vòi trên trong mỗi phút bằng $\frac{3}{4}$ lượng nước chảy vào, tức là bằng $\frac{3}{4}$x.

Do đó, số nước có thêm trong bể sau khi đồng thời mở cả hai vòi trên trong y phút bằng $\frac{3}{4}xy$ (lít).

b. Thay x = 36, y = 60 vào biểu thức trên, ta được: $\frac{3}{4}.36.60 = 1620$ lít.

Vậy, số nước có thêm trong bể sau khi đồng thời mở cả hai vòi trên với x = 36, y = 60 bằng 1620 lít.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

__Ví dụ 1:__ Tính giá trị của biểu thức $4x^2 + 2x - 1$ tại $x = -1$ và tại $x = \frac{1}{2}$.

Giải

a. Thay x = −1 vào biểu thức đã cho, ta được: $4(-1)^2 + 2(-1) - 1 = 4.1 - 2 - 1 = 1$.

Vậy, giá trị của biểu thức $4x^2 + 2x - 1$ tại $x = -1$ bằng 1.

b. Thay $x = \frac{1}{2}$ vào biểu thức đã cho, ta được: $4.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2.\frac{1}{2} - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$.

Vậy, giá trị của biểu thức $4x^2 + 2x - 1$ tại $x = \frac{1}{2}$ bằng 1.

__Ví dụ 2:__ Tính giá trị của biểu thức $x - 2y^2 + z^3$ tại x = 4, y = −1 và z = −1.

Giải

Thay x = 4, y = −1 và z = −1 vào biểu thức, ta được:

$$4 - 2(-1)^2 + (-1)^3 = 4 - 2 - 1 = 1.$$

Vậy, giá trị của biểu thức $x - 2y^2 + z^3$ tại x = 4, y = −1 và z = −1 bằng 1.

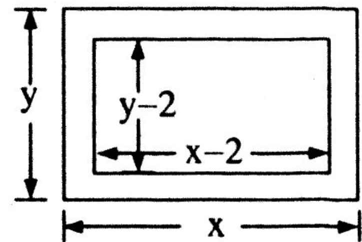
__Ví dụ 3:__ Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng x(m), chiều rộng bằng y(m) (với x, y > 2). Người ta mở một lối đi xung quanh vườn (thuộc đất của vườn) rộng 1(m).

a. Viết biểu thức tính diện tích của phần đất còn lại để trồng trọt.

b. Tính diện tích khu đất trồng trọt biết x = 14m, y = 10m.

Giải

a. Phần đất còn lại để trồng trọt có hình chữ nhật với:



- Chiều dài bằng x – 2.
- Chiều rộng bằng y – 2.

Do đó, diện tích của phần đất trồng trọt bằng:

$(x - 2)(y - 2)$.

b. Thay x = 14m, y = 10m vào biểu thức trên, ta được:

$(14 - 2)(10 - 2) = 12.8 = 96m^2$.

Vậy, diện tích của phần đất trồng trọt với x = 14m, y = 10m bằng $96m^2$.

Ví dụ 4: Một người công nhân lắp máy được hưởng lương như sau:

Lương cứng: 20 đồng / tháng.

Lương trách nhiệm (nếu có): 5 đồng / tháng.

Lương làm thêm (nếu có): 1 đồng / 1 sản phẩm.

Hỏi, mức lương của anh An là bao nhiêu nếu:

a. Trong một tháng, anh An đã lắp thêm được 4 sản phẩm.

b. Trong một tháng, anh An được công nhận là người có trách nhiệm và đã lắp thêm được 3 sản phẩm.

Giải

a. Trong một tháng, anh An đã lắp thêm được 4 sản phẩm. Do đó, lương của anh An là: 20 + 1 . 5 = 25 (đồng)

b. Trong một tháng, anh An được công nhận là người có trách nhiệm và đã lắp thêm được 3 sản phẩm. Do đó, lương của anh An là: 20 + 5 + 1 . 3 = 28 (đồng)

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Hãy nêu cách tính giá trị của một biểu thức đại số tại những giá trị cho trước của các biến.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho biểu thức: $9x^2 + 3x - 1$.

Tính giá trị của biểu thức tại $x = -1$ và tại $x = \frac{1}{3}$.

Bài tập 2. Cho biểu thức $4x^2 + 6x - 8$. Tính giá trị của biểu thức tại:

a. $x = 3$.　　b. $x = -2$.　　c. $x = -\frac{1}{2}$.

Bài tập 3. Tính giá trị của biểu thức $x^3 - 2y + z^5$ tại $x = -3$, $y = 3$ và $z = -2$.

Bài tập 4. Cho biểu thức $(x^2y - 2x - 2z)xy$. Tính giá trị của biểu thức tại:

a. $x = 1, y = -1, z = 3$.

b. $x = -\frac{1}{2}, y = 4, z = -3$.

Bài tập 5. Một mảnh vười hình chữ nhật có chiều dài bằng x(m), chiều rộng bằng y(m) (với x, y > 4). Người ta mở một lối đi xung quanh vườn (thuộc đất của vườn) rộng 2(m).

a. Viết biểu thức tính diện tích của phần đất còn lại để trồng trọt.

b. Tính diện tích khu đất trồng trọt biết x = 16m, y = 12m.

Bài tập 6. Một vòi nước chảy vào một bể nước, mỗi phút được x lít. Cùng lúc đó một vòi nước khác chảy từ bể ra, mỗi phút chảy được một lượng nước bằng $\frac{2}{3}$ lượng nước chảy vào.

a. Hãy biểu thị số nước có thêm trong bể sau khi đồng thời mở cả hai vòi trên trong y phút.

b. Tính số nước có thêm trong bể trên, biết x = 27, y = 30.

Bài tập 7. Hoá đơn thu tiền điện thoại của một hộ gia đình được tính như sau:

Thuê bao hàng tháng là 27000 đồng (bắt buộc).

200 phút đầu tiên họ phải trả 120 đồng/1phút.

500 phút tiếp theo họ phải trả 80 đồng/1 phút.

Và từ phút 701 trở đi họ phải trả 40 đồng/1 phút.

Hỏi gia đình đó phải thanh toán bao nhiêu tiền điện thoại nếu:

a. Một tháng họ sử dụng hết 680 phút.

b. Một tháng họ sử dụng hết 1028 phút.

V. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Thay $x = -1$ vào biểu thức đã cho, ta được: $9(-1)^2 + 3(-1) - 1 = 9.1 - 3 - 1 = 5$.

Vậy, giá trị của biểu thức $9x^2 + 3x - 1$ tại $x = -1$ bằng 5.

b. Thay $x = \frac{1}{3}$ vào biểu thức đã cho, ta được: $9.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3.\frac{1}{3} - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$.

Vậy, giá trị của biểu thức $9x^2 + 3x - 1$ tại $x = \frac{1}{3}$ bằng 1.

Bài tập 2.

b. 46. c. –4. d. –10.

Bài tập 3. Thay x = –3, y = 3 và z = –2 vào biểu thức, ta được:

$(-3)^3 - 2.3 + (-2)^5 = -27 - 6 - 32 = -65.$

Vậy, giá trị của biểu thức $x^3 - 2y + z^5$ tại x = –3, y = 3 và z = –2 bằng –65.

Bài tập 4.

a. 9. b. –16.

Bài tập 5.

a. Phần đất còn lại để trồng trọt có hình chữ nhật với:

- Chiều dài bằng x – 4.
- Chiều rộng bằng y – 4.

Do đó, diện tích của phần đất trồng trọt bằng: (x – 4)(y – 4).

b. Thay x = 16m, y = 12m vào biểu thức trên, ta được:

$(16 - 4)(12 - 4) = 12.8 = 96m^2$.

Vậy, diện tích của phần đất trồng trọt với x = 16m, y = 12m bằng $96m^2$.

Bài tập 6.

a. $\frac{xy}{3}$ (lít). b. 270 lít.

Bài tập 7.

a. Một tháng họ sử dụng hết 680 phút. Do đó, số tiền chi tiết như sau:

- Thuê bao hàng tháng là 27000 (đồng).
- 200 phút đầu tiên họ phải trả: 120 . 200 = 24000 (đồng).
- 480 số tiếp theo họ phải trả: 80 . 480 = 38400 (đồng).

Vậy, tổng số tiền họ phải thanh toán là:

27000 + 24000 + 38400 = 89400 (đồng).

b. Một tháng họ sử dụng hết 1028 phút. Do đó, số tiền chi tiết như sau:

- Thuê bao hàng tháng là 27000 (đồng).
- 200 phút đầu tiên họ phải trả: 120 . 200 = 24000 (đồng).
- 500 số tiếp theo họ phải trả: 80 . 500 = 4000 (đồng).
- 328 số tiếp theo họ phải trả: 40 . 328 = 13120 (đồng).

Vậy, tổng số tiền họ phải thanh toán là:

27000 + 24000 + 40000 + 13120 = 104120 (đồng).



ĐƠN THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐƠN THỨC

Thí dụ 1:

a. Các biểu thức đại số như 9, a, $\frac{3}{4}x$, $6xy^2$,... được gọi là các *đơn thức*.

b. Các biểu thức đại số $x + 2$, $x - 3x^2y$, $\frac{3}{x}$, $\frac{x}{y}$,... không phải là đơn thức.

Như vậy, ta có thể định nghĩa:

> *Đơn thức là biểu thức đại số chỉ gồm một số, hoặc một biến, hoặc một tích giữa các số và các biến.*
> *Số 0 được gọi là đơn thức không.*

Thí dụ 2: Cho hai chữ số x, y. Hãy lập hai biểu thức đại số, trong đó một biểu thứ là đơn thức còn một biểu thức không là đơn thức.

Giải

Với hai chữ số x, y, ta có:

- Đơn thức là xy (hoặc 2x, 8y, $9xy^2$,...).
- $x + y$ (hoặc $x - 2y$, $\frac{1}{x}$, $\frac{2x}{3y}$,...) không là đơn thức.

Nhận xét: Như vậy, một biểu thức đại số nếu có chứa một trong các phép toán +, −, : (số cho biến hoặc biến cho biến) thì sẽ không phải là đơn thức.

2. ĐƠN THỨC THU GỌN

Với đơn thức $12x^2y^6$ có thể được viết dưới các dạng khác, thí dụ:

$12xy^4xy^2$, $3x^2.4y^6$,...

điều khác biệt giữa $12x^2y^6$ với các dạng khác của nó là:

- Trong đó các biến x, y có mặt một lần dưới dạng một lũy thừa với số m nguyên dương.
- Nó là tích của một số với các biến.

Khi đó, ta nói $12x^2y^6$ là *đơn thức thu gọn*, trong đó:

- 12 là *hệ số* của đơn thức đó.

- x^2y^6 là *phần biến* của đơn thức đó.

Như vậy, ta có thể định nghĩa:

> *Đơn thức thu gọn là đơn thức chỉ gồm tích của một số với các biến mà mỗi biến đã được nâng lên lũy thừa với số mũ nguyên dương.*
>
> *Trong đó:*
>
> - *Số nói trên được gọi là hệ số của đơn thức thu gọn.*
> - *Phần còn lại gọi là phần biến của đơn thức thu gọn.*

Chú ý:
1. Ta cũng coi một số là đơn thức thu gọn.
2. Trong đơn thức thu gọn, mỗi biến chỉ được viết một lần. Thông thường, khi viết đơn thức thu gọn ta viết hệ số trước, phần biến sau và các biến được viết theo thứ tự bảng chữ cái.

Từ nay, khi nói đến đơn thức, nếu không nói gì thêm, ta hiểu đó là đơn thức thu gọn.

Thí dụ 3:

a. Đơn thức x^2y^8 là đơn thức thu gọn và có hệ số bằng 1.

b. Các đơn thức 3xyx, $5x^2yz^3xy^4$, ... không phải là đơn thức thu gọn.

3. BẬC CỦA MỘT ĐƠN THỨC

Với đơn thức $12x^2y^6$ ta thấy:

- Biến x có số mũ bằng 2.
- Biến y có số mũ bằng 6.
- Tổng các số mũ của các biến trong đơn thức là 2 + 6 = 8.

Ta nói 8 là bậc của đơn thức $12x^2y^6$.

Như vậy, ta có thể định nghĩa:

> ***Bậc của đơn thức có hệ số khác 0 là tổng số mũ của tất cả các biến có trong đơn thức đó.***

Thí dụ 4: Cho hai chữ số x, y. Hãy lập hai đơn thức thu gọn, trong đó một là đơn thức bậc 8 còn một là đơn thức bậc 9.

Giải

Với hai chữ số x, y, ta có:

- Đơn thức thu gọn bậc 8 là x^7y (hoặc $2x^8$, $8y^8$, $9x^6y^2$,...).
- Đơn thức thu gọn bậc 9 là $6x^7y^2$ (hoặc x^9, $6y^9$, $9x^3y^6$,...).

Chú ý: Một số là đơn thức thu gọn có bậc bằng 0.

4. NHÂN HAI ĐƠN THỨC

Để nhân đơn thức $3x^2y^6$ với đơn thức $2xy^2z^6$, ta thực hiện:

$$3x^2y^6.2xy^2z^6 = (3.2).(x^2y^6.xy^2z^6)$$

→ *Nhân các hệ số với nhau*

→ *Nhân các phần biến với nhau*

$$= (3.2).(x^2.x).(y^6.y^2).z^6 = 6x^3y^8z^6.$$

→ *Gồm các biến giống nhau và sử dụng quy tắc nhân hai lũy thừa cùng cơ số*

Như vậy, ta có quy tắc:

> ***Để nhân hai đơn thức, ta nhân các hệ số với nhau và nhân các phần biến với nhau.***

Thí dụ 5: Cho hai đơn thức $\frac{2}{3}a^2b$ và $\frac{3}{2}ab^2c$.Tính tích của hai đơn thức và xác định hệ số, bậc của đơn thức thu được.

Giải

Ta có: $\frac{2}{3}a^2b.\ \frac{3}{2}ab^2c = \left(\frac{2}{3}.\frac{3}{2}\right)(a^2b.ab^2c) = (a^2.a).(b.b^2).c = a^3b^3c.$

Khi đó, đơn thức a^3b^3c có hệ số bằng 1 và có bậc bằng $3 + 3 + 1 = 7$.

Nhận xét:

1. Tích của hai đơn thức là một đơn thức.
2. Mỗi đơn thức đều có thể viết thành một đơn thức thu gọn, thí dụ: $3x^2y\,(-4)xy^3\,(-8)y = 96x^3y^5$.

Thí dụ 6: Cho đơn thức $3xy^2z^3(-2xy^4)$. Thu gọn đơn thức và chỉ ra hệ số cùng bậc của nó.

Giải

Viết lại đơn thức dưới dạng:

$$3xy^2z^3(-2xy^4) = [3.(-2)].(xy^2z^3.xy^4) = -6.(x.x)(y^2.y^4).z^3 = -6x^2y^6z^3.$$

Như vậy đơn thức có:

- Hệ số bằng – 6.
- Có bậc bằng $2 + 6 + 3 = 11$.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là đơn thức (Vì sao ?):

a. $-\frac{9}{8}$.   b. x.   c. 8xy.6z.   d. x – 4y.

Giải

a. $-\frac{9}{8}$ là đơn thức, vì nó chỉ gồm một số.

b. x là đơn thức, vì nó chỉ gồm một biến.

c. 8xy.6z là đơn thức, vì nó là một tích giữa các số và các biến.

d. x – 4y không là đơn thức, vì nó chứa phép trừ.

Ví dụ 2: Cho hai đơn thức $-x^8y^8z^9$ và $6xy^3$.Tính tích của hai đơn thức và xác định hệ số, bậc của đơn thức thu được.

Giải

Ta có: $-x^8y^8z^9.6xy^3 = (-1.6).(x^8y^8z^9.xy^3) = -6(x^8.x).(y^8.y^3).z^9 = -6x^9y^{11}z^9$.

Khi đó, đơn thức $-6x^9y^{11}z^9$ có hệ số bằng –6 và có bậc bằng 9+11+9 = 29.

Ví dụ 3: Thu gọn các đơn thức rồi chỉ ra phần hệ số và bậc của chúng:

a. $6x.(-8x^2y).(9x^3y^2z)$.

b. $2x^6yz^4.(-\frac{1}{4}y^2z^3).(2xz^6)$.

Giải

a. Viết lại đơn thức dưới dạng:

$$[6.(-8).9].(x.x^2y.x^3y^2z) = -432(x.x^2.x^3)(y.y^2).z = -432x^6y^3z.$$

Như vậy, đơn thức có:

- Hệ số bằng –432.
- Có bậc bằng 6 + 3 + 1 = 10.

b. Viết lại đơn thức dưới dạng:

$$[2.(-\frac{1}{4}).2].(x^6yz^4.y^2z^3.xz^6) = -(x^6.x)(y.y^2).(z^4.z^3.z^6) = -x^7y^3z^{13}.$$

Như vậy, đơn thức có:

- Hệ số bằng –1.
- Có bậc bằng 7 + 3 + 13 = 21.

Ví dụ 4: Viết biểu thức tính diện tích của hình chữ nhật, biết hình chữ nhật có chiều dài gấp hai lần chiều rộng.

Giải

Giả sử hình chữ nhật có chiều rộng bằng x, suy ra chiều dài bằng 2x, do đó biểu thức diện tích: $2x.x = 2x^2$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa đơn thức và cho ví dụ.

Câu hỏi 2: Nếu dấu hiệu để khẳng định một biểu thức đại số không phải là đơn thức và cho ví dụ.

Câu hỏi 3: Thế nào là một đơn thức thu gọn. Cho ví dụ.

Câu hỏi 4: Phát biểu định nghĩa bậc của đơn thức có hệ số khác 0.

Câu hỏi 5: Một số có phải là một đơn thức thu gọn hay không ? Nếu có thì nó có bậc bằng bao nhiêu ?

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Trong các bểu thức sau, biểu thức nào là đơn thức (Vì sao ?):

a. $-\frac{6}{11}$. b. y^9. c. $3xy.2xz$. d. $8x - 3y^2$.

Bài tập 2. Cho ba chữ số x, y, z.

a. Hãy lập hai biểu thức đại số, trong đó một biểu thức là đơn thức còn một biểu thức không là đơn thức.

b. Hãy lập hai đơn thức thu gọn, trong đó một là đơn thức bậc 8 còn một là đơn thức bậc 9.

Bài tập 3. Cho biết phần hệ số và phần biến của các đơn thức sau rồi tính giá trị của chúng tại $a = 1$, $b = 2$ và $c = -1$:

a. $5{,}8a^2bc^8$. b. $0{,}12^2abc^{11}$.

Bài tập 4. Tính tích của hai đơn thức và xác định hệ số, bậc của đơn thức thu được.

a. $\frac{5}{2}a^2b^3c^6$ và $-2a^6d^9$. b. 2^4xy^4 và $\frac{3}{4}x^6y^8z^9$.

Bài tập 5. Thu gọn các đơn thức rồi tìm hệ số và bậc của chúng:

a. $x^2.y.(-2xy^2z).(-3x^3y^4z^8)$. b. $\frac{2}{3}x^3y^2z^4.(\frac{1}{4}xy^2z^3).(12xyz^2)$.

Bài tập 6. Viết biểu thức tính diện tích của hình chữ nhật, biết hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng.

Bài tập 7. Hãy viết các đơn thức với biến a, b và có giá trị bằng 18 tại $a = -2$ và $b = 1$.

Bài tập 8. Tính giá trị của các đơn thức sau:

a. $8xy^2z^3$ với $x = 3$, $y = 2$ và $z = -1$. b. $\frac{2}{5}x^2y^4$ với $x = 5$ và $y = -1$.

c. $-\frac{1}{81}x^2y$ với $x = -3$ và $y = 8$.

V. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. $-\frac{6}{11}$ là đơn thức, vì nó chỉ gồm một số.

b. y^9 là đơn thức, vì nó chỉ gồm một biến.

c. 3xy.2xz là đơn thức, vì nó là một tích giữa các số và các biến.

d. $8x - 3y^2$ không là đơn thức, vì nó chứa phép trừ.

Bài tập 2.

a. Với ba chữ số x, y, z, ta có:

- Đơn thức là xyz^2 (hoặc x, 6y, 8z, $9xyz^2$,...).
- $xy + z$ (hoặc $x - 6yz$, $\frac{1}{x}$, $\frac{9x}{yz}$,...) không là đơn thức.

b. Với ba chữ số x, y, z, ta có:

- Đơn thức thu gọn bậc 8 là x^6yz (hoặc $2x^8$, $8y^8$, $9z^8$, x^6y^2,...).
- Đơn thức thu gọn bậc 9 là $6x^4y^2z^3$ (hoặc x^9, $6y^9$, $9x^3z^6$,...).

Bài tập 3.

a. Đơn thức $5{,}8a^2bc^8$ có phần hệ số là 5,8 và phần biến là a^2bc^8.

Thay a = 1, b = 2 và c = –1 vào $5{,}8a^2bc^8$. Ta được: $5{,}8.\ 1^2.\ 2.\ (-1)^8 = 5{,}8.\ 2 = 11{,}6$

b. Đơn thức $0{,}12^2xyz^{11}$ có phần hệ số là $0{,}12^2$ và phần biến là xyz^{11}.

Thay a = 1, b = 2 và c = –1 vào $0{,}12^2xyz^{11}$. Ta được:

$$0{,}12^2 . 1 . 2 . (-1)^{11} = 0{,}12^2 . 2 = 0{,}0288.$$

Bài tập 4.

a. Ta có: $\frac{5}{2}a^2b^3c^6.(-2a^6d^9) = [\frac{5}{2}.(-2)].(a^2b^3c^6.a^6d^9) = -5a^8b^3c^6d^9$.

Khi đó, đơn thức $-5a^8b^3c^6d^9$ có hệ số bằng –5 và có bậc bằng 26.

b. Ta có: 2^4xy^4 và $\frac{3}{4}x^6y^8z^9 \Rightarrow 2^4xy^4.\ \frac{3}{4}x^6y^8z^9 = (2^4.\ \frac{3}{4}).(xy^4.x^6y^8z^9) = 12x^7y^{12}z^9$.

Khi đó, đơn thức $12x^7y^{12}z^9$ có hệ số bằng 12 và có bậc bằng 28.

Bài tập 5.

a. Ta được $6x^6y^7z^9$ nó có hệ số bằng 6 và có bậc bằng 22.

b. Ta được $2x^5y^5z^9$ nó có hệ số bằng 2 và có bậc bằng 19.

Bài tập 6. Giả sử hình chữ nhật có chiều rộng bằng x, suy ra chiều dài bằng 3x, do đó biểu thức diện tích: $3x.x = 3x^2$.

Bài tập 7. Các đơn thức với biến a, b và có giá trị bằng 18 tại a = -2 và b = 1

Chẳng hạn:

- $-9ab$. Thật vậy: $-9.(-2).1 = 9 . 2 = 18$
- $\frac{18}{4}.a^2b$. Thật vậy: $\frac{18}{4}.(-2)^2. 1 = 18$.

Bài tập 8.

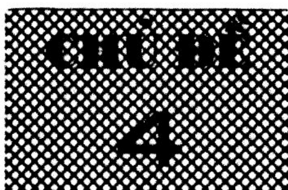
a. Thay x = 3, y = 2 và z = -1 vào $8xy^2z^3$. Ta được:

$$8. 3. 2^2. (-1)^3 = 8. 3. 4. (-1) = -96.$$

b. Thay x = 5 và y = -1 vào $-\frac{2}{5}x^2y^4$. Ta được:

$$\frac{2}{5} . 5^2 . (-1)^3 = \frac{2}{5} . 25 . 1 = 2 . 5 = 10.$$

c. Thay x = -3 và y = 9 vào $\frac{1}{81}x^2y$. Ta được: $\frac{1}{81} . (-3)^2 . 8 = \frac{1}{81} . 9 . 8 = \frac{8}{9}$.



ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

Các đơn thức xy^2, $3xy^2$, $-\frac{1}{2}xy^2$,... có chung phần biến. Khi đó, người ta nói các đơn thức đó là *đồng dạng* với nhau.

Như vậy, ta có định nghĩa:

Hai đơn thức đồng dạng là hai đơn thức có hệ số khác 0 và có cùng phần biến.

Thí dụ 1: Trong các đơn thức sau, hãy chỉ ra đơn thức đồng dạng với đơn thức $6ab^6$.

a. $-ab^6$.   b. $\frac{2}{ab^6}$.   c. $\frac{1}{4}ab^6$.   d. ab^6-a.

Giải

Ta có ngay:

- Các đơn thức $-ab^6$, $\frac{1}{4}ab^6$ đồng dạng với đơn thức $6ab^6$.

- Các đơn thức $\frac{2}{ab^6}$, $ab^6 - a$ không đồng dạng với đơn thức $6ab^6$.

Chú ý: Tất cả số khác 0 được coi là những đơn thức đồng dạng.

2. CỘNG, TRỪ CÁC ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

Chúng ta đã biết tính chất phân phối của phép nhân với phép cộng các số, do đó:

$2^2.33 + 5.33 = (2^2 + 5).33 = (4 + 5).33 = 9.33.$

Với cách thức tương tự như vậy với hai đơn thức đồng dạng, ta thấy:

Cộng các hệ số với nhau

$3abc + 4abc = (3 + 4)abc = 7abc.$

Giữ nguyên phần biến

Như vậy, ta có thể định nghĩa:

Để cộng (hoặc trừ) các đơn thức đồng dạng, ta cộng (hoặc trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến.

Thí dụ 2: Thực hiện phép tính:

a. $3xy^2 + \frac{3}{2}xy^2$.

b. $\frac{1}{2}x^4y^3 - 2x^4y^3$.

Giải

a. Ta có: $3xy^2 + \frac{3}{2}xy^2 = (3 + \frac{3}{2})xy^2 = \frac{9}{2}xy^2$.

b. Ta có: $\frac{1}{2}x^4y^3 - 2x^4y^3 = (\frac{1}{2} - 2)x^4y^3 = -\frac{3}{2}x^4y^3$.

Chú ý: Phép cộng, trừ các đơn thức đồng dạng còn được sử dụng trong bài toán tính giá trị của biểu thức.

Thí dụ 3: Tính giá trị của biểu thức $2abc - 3a^3c + 8$ tại $a = 1$ và $b = \frac{3}{2}$.

Giải

Thay $a = 1$ và $b = \frac{3}{2}$ vào biểu thức đã cho, ta được:

$2.1.\frac{3}{2}.c - 3.1^3.c + 8 = 3c - 3c + 8 = 8.$

Vậy, giá trị của biểu thức $2abc - 3a^3c + 8$ tại $a = 1$ và $b = \frac{3}{2}$ bằng 8.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Hãy xếp các đơn thức sau thành nhóm các đơn thức đồng dạng với nhau:

a. $-2xy^2z$ b. $6x^2yz$ c. $\frac{3}{2}xy^2z$ d. $8xzy^2$ e. $\frac{3}{4}x^2yz$

Giải

Ta có ngay:

- Các đơn thức $-2xy^2z$, $\frac{3}{2}xy^2z$, $8xzy^2$ đồng dạng với nhau.
- Các đơn thức $6x^2yz$, $\frac{3}{4}x^2yz$ đồng dạng với nhau.

Ví dụ 2: Thực hiện phép tính:

a. $3x^2y^3 + \frac{1}{3}x^2y^3 - \frac{2}{3}x^2y^3$. b. $6x^4y - 5x.3x^3y + 4x^2.2xy.3x$.

Giải

a. Ta có: $3x^2y^3 + \frac{1}{3}x^2y^3 - \frac{2}{3}x^2y^3 = (3 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3})x^2y^3 = \frac{8}{3}x^2y^3$.

b. Ta có:

$$6x^4y - 5x.3x^3y + 4x^2.2xy.3x = 6x^4y - (5.3).(x.x^3y) + (4.2.3).(x^2.xy.x)$$
$$= 6x^4y - 15x^4y + 24x^4y$$
$$= (6 - 15 + 24)x^4y = 15x^4y.$$

Ví dụ 3: Cho biểu thức: $3x.2xy - \frac{2}{3}x^2y - 4x^2.\frac{1}{3}y$.

a. Thực hiện đơn giản biểu thức.

b. Tính giá trị của biểu thức với $x = -2$, $y = \frac{1}{8}$.

Giải

a. Ta có: $3x.2xy - \frac{2}{3}x^2y - 4x^2.\frac{1}{3}y = 6x^2y - \frac{2}{3}x^2y - \frac{4}{3}x^2y$

$$= (6 - \frac{2}{3} - \frac{4}{3})x^2y = 4x^2y.$$

b. Thay $x = -2$, $y = \frac{1}{8}$ vào đơn thức $4x^2y$, ta được: $4.(-2)^2.\frac{1}{8} = 2$.

Vậy, giá trị của biểu thức tại $x = -2$, $y = \frac{1}{8}$ bằng 2.

Ví dụ 4: Cho hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 6cm. Viết biểu thức tính chu vi của hình chữ nhật.

Giải

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Giả sử hình chữ nhật có chiều rộng bằng x, suy ra chiều dài bằng $x + 6$.

Khi đó, chu vi hình chữ nhật được cho bởi: $2(x + x + 6) = 2(2x + 6)$.

Cách 2: Giả sử hình chữ nhật có chiều dài bằng x, suy ra chiều rộng bằng $x - 6$.

Khi đó, chu vi hình chữ nhật được cho bởi: $2(x + x - 6) = 2(2x - 6)$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa hai đơn thức đồng dạng và cho ví dụ.

Câu hỏi 2: Phát biểu quy tắc cộng (hoặc trừ) các đơn thức đồng dạng.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Hãy xếp các đơn thức sau thành nhóm các đơn thức đồng dạng vớ nhau:

a. $6x^2yz^2$ b. $6x^3y^2z$ c. $\frac{7}{5}x^2yz^2$ d. $-4x^3zy^2$ e. $\frac{3}{4}x^3y^2z$

Bài tập 2. Các cặp đơn thức sau có đồng dạng hay không ?

a. $4\frac{1}{2}x^8$ và $-0.25x^8y$.

b. $11xy^4z^2$ và $\frac{7}{8}xy^4z$.

c. $\frac{11}{8}x^8y^4z$ và $9x^8y^4z$.

d. $-3xy^2z^3$ và $\frac{3}{5}xy^2z^6$.

Bài tập 3. Thực hiện phép tính:

a. $x^2 + 6x^2 - 0.75x^2$.

b. $8xy^2 - 0.25xy^2 + \frac{3}{4}xy^2$.

c. $1.5xy^2z^3 - 1\frac{1}{3}xy^2z^3 + 1.8xy^2z^3 + 4\frac{2}{3}xy^2z^3$.

Bài tập 4. Cho biểu thức: $6x^2y - \frac{2}{3}x^2y - x^2y + \frac{1}{6}x^2y$.

a. Thực hiện đơn giản biểu thức.

b. Tính giá trị của biểu thức với $x = \frac{1}{3}$, $y = 2$.

Bài tập 5. Cho hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 8cm. Viết biểu thức tín chu vi của hình chữ nhật.

Bài tập 6. Điền đơn thức vào ô trống:

a. $4x^2 + \square = 6x^2$.

b. $\square - 9x^2y^3 = -6x^2y^3$.

c. $\square - \square + x^3yz^2 = 9x^3yz^2$.

V. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Ta có ngay:

- Các đơn thức $6x^2yz^2$, $\frac{7}{5}x^2yz^2$ đồng dạng với nhau.
- Các đơn thức $6x^3y^2z$, $-4x^3zy^2$, $\frac{3}{4}x^3y^2z$ đồng dạng với nhau.

Bài tập 2. Ta có ngay:

a. Không đồng dạng.

b. Không đồng dạng.

c. Đồng dạng.

d. Không đồng dạng.

Bài tập 3.

a. Ta có: $x^2 + 6x^2 - 0.75x^2 = 6.25x^2$.

b. Ta có: $8xy^2 - 0.25xy^2 + \frac{3}{4}xy^2 = 8.5xy^2$.

c. Ta có: $1.5xy^2z^3 - 1\frac{1}{3}xy^2z^3 + 1.8xy^2z^3 + 4\frac{2}{3}xy^2z^3 = 6\frac{19}{30}xy^2z^3$.

Bài tập 4.

a. Ta có: $6x^2y - \frac{2}{3}x^2y - x^2y + \frac{1}{6}x^2y = (6 - \frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{6})x^2y = \frac{9}{2}x^2y$.

Thay $x = \frac{1}{3}$, $y = 2$ vào biểu thức $\frac{9}{2}x^2y$ ta được: $\frac{9}{2}.\left(\frac{1}{3}\right)^2.2 = 1$.

Vậy, giá trị của biểu thức tại $x = \frac{1}{3}$, $y = 2$ bằng 1.

Bài tập 5. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Giả sử hình chữ nhật có chiều rộng bằng x, suy ra chiều dài bằng x + 8.

Khi đó, chu vi hình chữ nhật được cho bởi: $2(x + x + 8) = 2(2x + 8)$.

Cách 2: Giả sử hình chữ nhật có chiều dài bằng x, suy ra chiều rộng bằng x – 8.

Khi đó, chu vi hình chữ nhật được cho bởi: $2(x + x - 8) = 2(2x - 8)$.

Bài tập 6.

a. $2x^2$.

b. $3x^2y^3$.

c. Có nhiều cách điền, thí dụ:

$$\boxed{9x^3yz^2} - \boxed{x^3yz^2} + x^3yz^2 = 9x^3yz^2.$$



ĐA THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐA THỨC

Các biểu thức:

- $x^2 + 6x - 7$.
- $x^4y^3 + 8x^3y^2 - \frac{1}{2}x$.
- $x^2y - \frac{2}{3}xy + 4xy^2 - \frac{1}{2}x^2y + 8$.

...

được gọi là các *đa thức*.

Như vậy, ta có thể định nghĩa:

Đa thức là một tổng của những đơn thức. Mỗi đơn thức trong tổng gọi là một hạng tử của đa thức đó.

Để cho gọn, người ta thường kí hiệu các đa thức bằng các chữ cái in hoa A, B, P, Q,.... Thí dụ ta đặt: $P = x^2y + 1 - \frac{2}{3}xy + 4xy^2 - \frac{1}{2}x^2y + 8$.

2. THU GỌN ĐA THỨC

Nhận thấy rằng trong đa thức P ở trên có những hạng tử là đơn thức đồng dạng (còn gọi là hạng tử đồng dạng), do đó có thể thực hiện được phép cộng các đơn thức đồng dạng đó, ta được: $P = \frac{1}{2}x^2y - \frac{2}{3}xy + 4xy^2 + 9$.

Khi đó, trong đa thức này không còn hai hạng tử nào đồng dạng. Ta gọi đa thức đó là dạng thu gọn của đa thức P.

Thí dụ 1: Hãy thu gọn đa thức sau: $P = 4x^3y^2z - \frac{1}{2}xy^2z + 6x^3y^2z + 1.25x^3y^2z$.

Giải

Ta được: $P = 10x^3y^2z + 0.75x^3y^2z$.

3. BẬC CỦA ĐA THỨC

Xét đa thức: $Q = xy^4 + x^6y + x^4 - 9$

trong đa thức này, ta thấy:

- Hạng tử xy^4 có bậc 5.
- Hạng tử x^6y có bậc 7.
- Hạng tử x^4 có bậc 4.
- Hạng tử 9 có bậc 0.

Như vậy, bậc cao nhất trong các bậc đó bằng 7. Khi đó ta nói 7 là bậc của đ thức Q.

Từ đó, ta có thể định nghĩa:

> *Bậc của đa thức là bậc của hạng tử có bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó.*

Chú ý:
1. Số 0 cũng được gọi là đa thức không và nó không có bậc.
2. Khi tìm bậc của một đa thức, trước hết ta phải thu gọn đa thức đó.

Thí dụ 2: Tìm bậc của đa thức: $P = 6x^4 + 3x^5 - 3x^2y - 3x^5 + 1 - 6x^4$.

Giải

Thu gọn đa thức P về dạng: $P = -3x^2y + 1$.

Suy ra, đa thức P có bậc bằng 3.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Lập biểu thức đại số chứa các biến x, y, z mà:

a. Biểu thức đó vừa là đơn thức, vừa là đa thức.

b. Biểu thức đó chỉ là đa thức.

Giải

a. Với ba chữ số x, y, z, ta có:

Biểu thức vừa là đơn thức, vừa là đa thức là: x^2yz^3 (hoặc x^2, 8y, 5xz, $9x^2y^2z^8$,...).

b. Với ba chữ số x, y, z, ta có:

Biểu thức chỉ là đa thức là: $2x^2 + 3y^3 + 5z^5$ (hoặc $8x - 6yz^2$, $\frac{8}{x}$, $\frac{9x}{yz}$,...)

Ví dụ 2: Tính giá trị của các đa thức sau:

a. $5x^2y + 8xy^2 - 10x^2y^2$ tại $x = -1$ và $y = -3$.

b. $x^2y^3 - 2xy^2 + x^8y^8$ tại $x = -1$ và $y = 1$.

Giải

a. Thay $x = -1$ và $y = -3$ vào $5x^2y + 8xy^2 - 10x^2y^2$. Ta được:

$$5(-1)^2.(-3) + 8.(-1).(-3)^2 - 10(-1)^2(-3)^2$$

$$= 5.(-3) + 8.(-1).9 - 10.9 = -15 - 72 - 90 = -177.$$

Thay $x = -1$ và $y = 1$ vào $x^2y^3 - 2xy^2 + x^8y^8$. Ta được:

$$(-1)^2.1^3 - 2(-1).1^2 + (-1)^8.1^8 = 1 + 2 + 1 = 4.$$

Ví dụ 3: Thu gọn đa thức sau:

a. $A = 8x^2 + 2xy^2 - 5x^2y^2 - 2xy^2 + 5x^2y^2$.

b. $B = -\frac{2}{3}x^2y^2 + 5x^2y^2z^2 + 2x^2y^2 - y^7 - 5x^2y^2z^2$.

iải

Thu gọn đa thức A về dạng:

$$A = 8x^2 + 2xy^2 - 5x^2y^2 - 2xy^2 + 5x^2y^2$$
$$= 8x^2 + (2xy^2 - 2xy^2) - (5x^2y^2 + 5x^2y^2) = 8x^2 + 0 - 0 = 8x^2.$$

Thu gọn đa thức B về dạng:

$$B = -\frac{2}{3}x^2y^2 + 5x^2y^2z^2 + 2x^2y^2 - y^7 - 5x^2y^2z^2$$

$$= (-\frac{2}{3}x^2y^2 + 2x^2y^2) + (5x^2y^2z^2 - 5x^2y^2z^2) - y^7$$

$$= x^2y^2(2 - \frac{2}{3}) + 0 - y^7 = \frac{4}{3}x^2y^2 - y^7.$$

Ví dụ 4: Cho đa thức: $P = 5x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 8$

a. Biểu diễn đa thức P thành tổng của hai đa thức.

b. Biểu diễn đa thức P thành hiệu của hai đa thức.

iải

Ta có thể biểu diễn đa thức P thành tổng của hai đa thức như sau:

$P = (5x^5 - 4x^4) + (3x^3 - 2x^2 + x - 8)$;

$P = (5x^5 - 4x^4 + 3x^3) + (-2x^2 + x - 8)$;

$P = (5x^5 - 4x^4 - 2x^2 + x) + (3x^3 - 8)$;

...

Ta có thể biểu diễn đa thức P thành hiệu của hai đa thức như sau:

$P = (5x^5 - 4x^4 + 3x^3) - (2x^2 - x + 8)$;

$P = (5x^5) - (4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 8)$;

$P = (5x^5 - 4x^4 - 2x^2 + x) - (-3x^3 + 8)$;

...

I. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

âu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa đa thức và cho ví dụ.

âu hỏi 2: Mỗi đơn thức có phải là một đa thức không ? Vì sao ?

âu hỏi 6: Thế nào là một đa thức có dạng thu gọn. Cho ví dụ.

Câu hỏi 7: Phát biểu định nghĩa bậc của đa thức.

Câu hỏi 8: Số 0 được gọi là đa thức gì và nó có bậc bằng bao nhiêu ?

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tìm bậc của đa thức:

a. $A = 2x^4 + 3x^5 - 8x^2y^2 - 3x^5 + 9 - 2x^4$.

b. $B = 4x^5y^2 - 3xy^2 + 7x^2y + 2xy^2 - 7x^2y$.

Bài tập 2. Tính giá trị của các đa thức sau:

a. $A = x^2y + 3xy^2 - 5x^2y^2 + 8xy$ tại $x = -1$ và $y = 2$.

b. $B = 4x^3 + x^2y - x^4y^4 + xy + 11$ tại $x = 1$ và $y = -1$.

Bài tập 3. Thu gọn đa thức sau:

a. $A = \frac{1}{2}x^2yz + 2xy^2z - xyz^2 - 2x^2yz - 2xy^2z + xyz^2$.

b. $B = -\frac{1}{3}x^2y^2 + y^2z^2 + \frac{1}{2}x^2y^2 - y^2z^2 - 5x^2y^2$.

Bài tập 4. Cho đa thức: $P = 6x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x - 9$

a. Biểu diễn đa thức P thành tổng của hai đa thức.

b. Biểu diễn đa thức P thành hiệu của hai đa thức.

V. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài tập 1:

a. Ta có: $A = 2x^4 + 3x^5 - 8x^2y^2 - 3x^5 + 9 - 2x^4$

$= 2x^4 - 2x^4 + 3x^5 - 3x^5 - 8x^2y^2 + 9 = -8x^2y^2 + 9$

Vậy, đa thức A có bậc bằng 4.

b. Ta có: $B = 4x^5y^2 - 3xy^2 + 7x^2y + 2xy^2 - 7x^2y$

$= 4x^5y^2 - 3xy^2 + 2xy^2 + 7x^2y - 7x^2y = 4x^5y^2 - xy^2$.

Vậy, đa thức B có bậc bằng 7.

Bài tập 2:

a. Thay $x = -1$ và $y = 2$ vào A. Ta được:

$A = (-1)^2 .\ 2 + 3(-1).\ 2^2 - 5(-1)^2 .\ 2^2 + 8(-1).\ 2$

$= 2 - 3 . 4 + 5. 4 - 8 . 2 = 2 - 12 + 20 - 16 = -6$

b. Thay $x = 1$ và $y = -1$ vào B.

Ta được:

$B = 4.1^3 + 1^2.(-1) - 1^4(-1)^4 + 1.(-1) + 11 = 4 - 1 - 1 - 1 + 11 = 12$.

Bài tập 3:

a. Ta có: $A = \frac{1}{2}x^2yz + 2xy^2z - xyz^2 - 2x^2yz - 2xy^2z + xyz^2$

$= \frac{1}{2}x^2yz - 2x^2yz + 2xy^2z - 2xy^2z + xyz^2 - xyz^2 = -\frac{3}{2}x^2yz.$

b. Ta có: $B = -\frac{1}{3}x^2y^2 + y^2z^2 + \frac{1}{2}x^2y^2 - y^2z^2 - 5x^2y^2$

$= (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})x^2y^2 + y^2z^2 - y^2z^2 - 5x^2y^2 = \frac{1}{6}x^2y^2 - 5x^2y^2.$

Bài tập 4:

a. Ta có thể biểu diễn đa thức P thành tổng của hai đa thức như sau:

$P = (6x^6 - 2x^5) + (3x^4 - 2x^3 + x - 9)$;

$P = (6x^6 - 2x^5 + 3x^4) + (-2x^3 + x - 9)$;

$P = (6x^6 - 2x^5 - 2x^3 + x) + (3x^4 - 9)$;

...

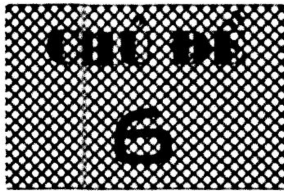
b. Ta có thể biểu diễn đa thức P thành hiệu của hai đa thức như sau:

$P = (6x^6 - 2x^5) - (-3x^4 + 2x^3 - x + 9)$;

$P = (6x^6 - 2x^5 + 3x^4) - (2x^3 - x + 9)$;

$P = (6x^6 - 2x^5 + x - 9) - (2x^3 + 3x^4)$;

...



CỘNG, TRỪ ĐA THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. CỘNG HAI ĐA THỨC

Để cộng đa thức $P = x^2 + 6x + 5$ với đa thức $Q = -3x + 9$, ta thực hiện:

$P + Q = (x^2 + 6x + 5) + (-3x + 9)$ – *Đặt phép toán*

$= x^2 + 6x + 5 - 3x + 9$ – *Thực hiện phép bỏ dấu ngoặc*

$= x^2 + (6x - 3x) + (5 + 9)$ – *Sử dụng tính chất giao hoán và kết hợp*

$= x^2 + 3x + 13$ – *Cộng, trừ các đơn thức đồng dạng*

Khi đó, ta nói $x^2 + 3x + 13$ là tổng của hai đa thức P và Q.

Thí dụ 1: Tính tổng của hai đa thức:

$$P = 6x^2y - 6xy^2 + xy \text{ và } Q = 7xy + 4xy^2 + y.$$

Giải

Ta có: $P + Q = (6x^2y - 6xy^2 + xy) + (7xy + 4xy^2 + y)$

$= 6x^2y - 6xy^2 + xy + 7xy + 4xy^2 + y$

$= 6x^2y + (xy + 7xy) + (4xy^2 - 6xy^2) + y$

$= 6x^2y + 8xy - 2xy^2 + y.$

2. TRỪ HAI ĐA THỨC

Để trừ đa thức $P = x^2 + 6x + 5$ cho đa thức $Q = -3x + 9$, ta thực hiện:

$P + Q = (x^2 + 6x + 5) - (-3x + 9)$ – *Đặt phép toán*

$= x^2 + 6x + 5 + 3x - 9$ – *Thực hiện phép bỏ dấu ngoặc*

$= x^2 + (6x + 3x) + (5 - 9)$ – *Sử dụng tính chất giao hoán và kết hợp*

$= x^2 + 9x - 4$ – *Cộng, trừ các đơn thức đồng dạng*

Khi đó, ta nói $x^2 + 9x - 4$ là hiệu của hai đa thức P và Q.

Thí dụ 2: Tính P – Q, biết:

$$P = x^2y^3 + x^2y - 6xy^2 \text{ và } Q = -2xy^2 + 9x^2y - 8.$$

Giải

Ta có: $P + Q = (x^2y^3 + x^2y - 6xy^2) - (-2xy^2 + 9x^2y - 8)$

$= x^2y^3 + x^2y - 6xy^2 + 2xy^2 - 9x^2y + 8$

$= x^2y^3 + (x^2y - 9x^2y) + (-6xy^2 + 2xy^2) + 8$

$= x^2y^3 - 8x^2y - 4xy^2 + 8$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hai đa thức: $P = 8x^3 - 2x^2 + x + 2$ và $Q = x^4 - x^3 + 3x$.

a. Tính P + Q.

b. Tính P – Q.

c. Tính Q – P.

Giải

a. Ta có: $P + Q = (8x^3 - 2x^2 + x + 2) + (x^4 - x^3 + 3x)$

$= 8x^3 - 2x^2 + x + 2 + x^4 - x^3 + 3x$

$= (8x^3 - x^3) - 2x^2 + (x + 3x) + 2 + x^4$

$= 7x^3 - 2x^2 + 4x + 2 + x^4.$

b. Ta có: $P - Q = 8x^3 - 2x^2 + x + 2 - x^4 + x^3 - 3x$

$= (8x^3 + x^3) - 2x^2 + (x - 3x) + 2 - x^4$

$= 9x^3 - 2x^2 - 2x + 2 - x^4.$

c. Ta có: $Q - P = (x^4 - x^3 + 3x) - (8x^3 - 2x^2 + x + 2)$

$= x^4 - x^3 + 3x - 8x^3 + 2x^2 - x - 2$

$= x^4 - (x^3 + 8x^3) + (3x - x) + 2x^2 - 2$

$= x^4 - 9x^3 + 2x + 2x^2 - 2.$

Ví dụ 2: Tìm đa thức A biết:

a. $A + (x^2 - y^2) = 8x^2 + 2y^2 - 3x^2y.$

b. $A - (2xy - x^2 + 2y^2) = x^2 - 2y^2 + xy.$

Giải

a. Ta có: $A + (x^2 - y^2) = 8x^2 + 2y^2 - 3x^2y$

$\Leftrightarrow A = (8x^2 + 2y^2 - 3x^2y) - (x^2 - y^2)$

$= 7x^2 + 3y^2 - 3x^2y.$

Vậy, đa thức cần tìm: $A = 7x^2 + 3y^2 - 3x^2y.$

b. Ta có: $A - (2xy - x^2 + 2y^2) = x^2 - 2y^2 + xy$

$\Leftrightarrow A = (x^2 - 2y^2 + xy) + (2xy - x^2 + 2y^2) = 3xy$

Vậy, đa thức cần tìm: $A = 3xy.$

Ví dụ 3: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a. $P = xy^2 + x^2y^4 + x^3y^6 + ... + x^8y^{16}$ tại $x = -1$ và $y = 1$.

b. $Q = xy^2z + x^2y^4z^2 + x^3y^6z^3 + ... + x^8y^{16}z^8$ tại $x = -1$, $y = -1$ và $z = -1$.

'iải

. Ta có: $P = xy^2 + (xy^2)^2 + (xy^2)^3 + ... + (xy^2)^8$.

Khi $x = -1$ và $y = 1$, ta được: $xy^2 = -1$.

Do đó: $P = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 0$.

. Ta có: $Q = xy^2z + (xy^2z)^2 + (xy^2z)^3 + ... + (xy^2z)^8$.

Khi $x = -1$, $y = -1$ và $z = -1$, ta được : $xy^2z = (-1) . (-1)^2 . (-1) = 1$.

Do đó: $Q = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$.

Ví dụ 4: Cho hai biểu thức sau:

$$P + Q = 2x^2 + 5y^2 - 3xy; \quad (1)$$

$$P - Q = x^2 - y^2 + 2xy. \quad (2)$$

Tìm hai đa thức P và Q thoả mãn hai biểu thức trên.

'iải

Ta cộng hai vế của biểu thức (1) và (2), ta được:

$$2P = 2x^2 + 5y^2 - 3xy + x^2 - y^2 + 2xy = 3x^2 + 4y^2 - xy.$$

$$\Rightarrow P = (3x^2 + 4y^2 - xy) : 2 = \frac{3}{2}x^2 + 2y^2 - \frac{1}{2}xy.$$

Ta trừ hai vế của biểu thức (1) và (2), ta được:

$$2Q = 2x^2 + 5y^2 - 3xy - (x^2 - y^2 + 2xy)$$

$$= 2x^2 + 5y^2 - 3xy - x^2 + y^2 - 2xy = x^2 + 6y^2 - 5xy$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2}x^2 + 3y^2 - \frac{5}{2}xy.$$

Vậy, hai đa thức cần tìm là: $P = \frac{3}{2}x^2 + 2y^2 - \frac{1}{2}xy$ và $Q = \frac{1}{2}x^2 + 3y^2 - \frac{5}{2}xy$.

II. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

'âu hỏi 1: Nêu các bước cần thực hiện để cộng hai đa thức.

'âu hỏi 2: Nêu các bước cần thực hiện để trừ hai đa thức.

V. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

'ài tập 1. Cho hai đa thức: $P = 3x^3 - 3x^2 + 8x - 5$ và $Q = 5x^2 - 3x + 2$.

a. Tính P + Q.

b. Tính P – Q.

c. Tính Q – P.

'ài tập 2. Cho hai đa thức: $P = x^4 - x^3 + x^2 + 3x$ và $Q = 2x^4 - 9x^2 - 5$.

a. Tính P + Q.

b. Tính P – Q.

c. Tính Q – P.

Bài tập 3. Cho hai đa thức: $P = 2x^2y + 9xy^2 - 7y^3$ và $Q = 8x^2y + xy^2$.

a. Tính P + Q.

b. Tính P – Q.

c. Tính Q – P.

Bài tập 4. Tìm đa thức A biết:

a. $2A + (2x^2 + y^2) = 6x^2 - 5y^2 - 2x^2y^2$.

b. $2A - (xy + 3x^2 - 2y^2) = x^2 - 8y^2 + xy$.

Bài tập 5. Cho hai biểu thức sau:

$$2P + Q = x^2y + 6xy^2 + 3x^2y^2; \quad (1)$$

$$P - Q = 2x^2y - xy^2 + 3x^2y^2 \quad (2)$$

Tìm hai đa thức P và Q thoả mãn hai biểu thức trên.

V. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Ta có: $P + Q = (3x^3 - 3x^2 + 8x - 5) + (5x^2 - 3x + 2)$

$= 3x^3 - 3x^2 + 8x - 5 + 5x^2 - 3x + 2$

$= 3x^3 - (3x^2 - 5x^2) + (8x - 3x) + (2 - 5)$

$= 3x^3 + 2x^2 + 5x - 3$.

b. Ta có: $P - Q = (3x^3 - 3x^2 + 8x - 5) - (5x^2 - 3x + 2)$

$= 3x^3 - 3x^2 + 8x - 5 - 5x^2 + 3x - 2$

$= 3x^3 - (3x^2 + 5x^2) + (8x + 3x) - (5 + 2)$

$= 3x^3 - 8x^2 + 11x - 7$.

c. Ta có: $Q - P = (5x^2 - 3x + 2) - (3x^3 - 3x^2 + 8x - 5)$

$= 5x^2 - 3x + 2 - 3x^3 + 3x^2 - 8x + 5$

$= (5x^2 + 3x^2) - (3x + 8x) - 3x^3 + (5 + 2)$

$= 8x^2 - 11x - 3x^3 + 7$.

Bài tập 2.

a. $P + Q = 3x^4 - x^3 - 8x^2 + 3x - 5$.

b. $P - Q = -x^4 - x^3 + 10x^2 + 3x + 5$.

c. $Q - P = x^4 + x^3 - 10x^2 - 3x - 5$.

Bài tập 3.

a. $P + Q = 10x^2y + 10xy^2 - 7y^3$.

b. $P - Q = -6x^2y + 8xy^2 - 7y^3$.

c. $Q - P = 6x^2y - 8xy^2 + 7y^3$.

Bài tập 4.

a. Ta có: $2A + (2x^2 + y^2) = 6x^2 - 5y^2 - 2x^2y^2$

$\Leftrightarrow 2A = (6x^2 - 5y^2 - 2x^2y^2) - (2x^2 + y^2)$

$= 4x^2 - 6y^2 - 2x^2y^2$

$\Leftrightarrow A = 2x^2 - 3y^2 - x^2y^2$.

Vậy, đa thức cần tìm: $A = 2x^2 - 3y^2 - x^2y^2$.

b. Ta có: $2A - (xy + 3x^2 - 2y^2) = x^2 - 8y^2 + xy$

$\Leftrightarrow 2A = (x^2 - 8y^2 + xy) + (xy + 3x^2 - 2y^2) = 4x^2 - 10y^2 + 2xy$

$\Leftrightarrow A = 2x^2 - 5y^2 + xy$.

Vậy, đa thức cần tìm: $A = 2x^2 - 5y^2 + xy$.

Bài tập 5. Ta cộng hai vế của biểu thức (1) và (2), ta được:

$3P = x^2y + 6xy^2 + 3x^2y^2 + 2x^2y - xy^2 + 3x^2y^2 = 3x^2y + 5xy^2 + 6x^2y^2$.

$\Rightarrow P = (3x^2y + 5xy^2 + 6x^2y^2): 3 = x^2y + \frac{5}{3}xy^2 + 2x^2y^2$.

Ta có: (2) $\Leftrightarrow 2(P - Q) = 2(2x^2y - xy^2 + 3x^2y^2)$

$\Leftrightarrow 2P - 2Q = 4x^2y - 2xy^2 + 6x^2y^2$ (3)

Ta trừ hai vế của biểu thức (1) và (3), ta được:

$3Q = x^2y + 6xy^2 + 3x^2y^2 - (4x^2y - 2xy^2 + 6x^2y^2)$

$= x^2y + 6xy^2 + 3x^2y^2 - 4x^2y + 2xy^2 - 6x^2y^2) = - 3x^2y + 8xy^2 - 3x^2y^2$

$\Rightarrow Q = - x^2y + \frac{8}{3}xy^2 - x^2y^2$.



ĐA THỨC MỘT BIẾN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐA THỨC MỘT BIẾN

Ta có: $A = x^2 + 2x + 3$, được gọi là đa thức của biến x.

$B = 6 + y^2 + 7y - 13y^3$, được gọi là đa thức của biến y.

Như vậy, ta có thể định nghĩa:

Đa thức một biến là tổng của những đơn thức của cùng một biến.

Để chỉ rõ:

- A là đa thức của biến x người ta viết A(x).
- B là đa thức của biến y người ta viết B(y).

Khi đó, giá trị của đa thức A(x) tại x = 8 được kí hiệu là A(8),...

Thí dụ 1: Cho đa thức: $P(x) = x^2 - 8x + 19$.

a. Tìm bậc của đa thức A(x).

b. Tính A(4), A(−1).

Giải

a. Đa thức A(x) có bậc 2.

b. Ta có: $A(4) = 4^2 - 8.4 + 19 = 3$.

c. Ta có: $A(-1) = (-1)^2 - 8.(-1) + 19 = 28$.

Chú ý: Mỗi số được coi là một đa thức một biến.

2. SẮP XẾP MỘT ĐA THỨC

Để thuận lợi cho việc tính toán đối với các đa thức một biến, người ta sắp xế các hạng tử của chúng theo lũy thừa tăng hoặc giảm của biến.

Thí dụ 2: Hãy sắp xếp các hạng tử của đa thức sau: $P(x) = 7 + x^3 + 9x - 27x^2$

Giải

Khi sắp xếp các hạng tử của chúng theo:

- Lũy thừa tăng, ta được: $P(x) = 7 + 9x - 27x^2 + x^3$.
- Lũy thừa giảm, ta được: $P(x) = x^3 - 27x^2 + 9x + 7$.

Chú ý: Để sắp xếp các hạng tử của một đa thức, trước hết phải thu gọn đa thức đó.

Thí dụ 3: Hãy sắp xếp các hạng tử của đa thức sau:

$$Q(x) = 2 - 3x^2 + x^4 - 6x^3 + 9x + 3x^3 - x - 7.$$

Giải

Thu gọn đa thức bằng cách:

$$Q(x) = (2 - 7) - 3x^2 + x^4 - (6x^3 - 3x^3) + (9x - x) = -5 - 3x^2 + x^4 - 3x^3 + 8x.$$

Khi sắp xếp các hạng tử của chúng theo:

- Lũy thừa tăng, ta được: $Q(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 8x - 5$.
- Lũy thừa giảm, ta được: $Q(x) = -5 + 8x - 3x^2 - 3x^3 + x^4$.

Nhận xét: Mọi đa thức bậc hai của biến x, sau khi sắp xếp các hạng tử của chúng theo lũy thừa giảm của biến, đều có dạng:

$$ax^2 + bx + c, \text{ với } a \neq 0.$$

Như vậy, ta có một biểu thức đại số trong đó x là biến còn a, b, c đại diện cho các số xác định cho trước. Để phân biệt với biến, người ta gọi những chữ như vậy là *hằng số* (gọi tắt là *hằng*).

3. HỆ SỐ

Xét đa thức: $P(x) = 2x^3 + cx - 3$

đó là một đa thức đã thu gọn, trong đó:

- 2 là hệ số của lũy thừa bậc 3,
- c là hệ số của lũy thừa bậc 1,
- -3 là hệ số của lũy thừa bậc 0 (còn gọi là *hệ số tự do*).

Ngoài ra, vì P(x) có bậc bằng 3 nên hệ số của lũy thừa bậc 3 còn gọi là *hệ số cao nhất*.

Chú ý: Có thể viết đa thức P(x) đầy đủ từ lũy thừa bậc cao nhất đến lũy thừa bậc 0 như sau: $P(x) = 2x^3 + 0x^2 + cx - 3$.

Do đó, ta nói hệ số của lũy thừa bậc 2 của P(x) bằng 0.

Thí dụ 4: Cho đa thức: $Q(x) = 2x^5 - 3x^2 - 3 + x^4 - 2 + 6x^3 + 8x - 6x^3 + 5 - 2x$

a. Sắp xếp các hạng tử của Q(x) theo lũy thừa giảm của biến.

b. Viết đa thức Q(x) đầy đủ từ lũy thừa bậc cao nhất đến lũy thừa bậc 0.

c. Chỉ ra các hệ số của Q(x).

d. Tính Q(−2), Q(1).

Giải

a. Thu gọn Q(x), ta được:

$$Q(x) = (2x^5 - 2x^5) - 3x^2 - (3 + 2 - 5) + x^4 + (6x^3 - 6x^3) + 8x$$
$$= -3x^2 + x^4 + 8x.$$

Khi đó, Q(x) được sắp xếp theo lũy thừa giảm của biến là: $Q(x) = x^4 - 3x^2 + 8x$.

b. Dạng đầy đủ của Q(x) là: $Q(x) = x^4 - 0.x^3 - 3x^2 + 8x + 0$.

c. Như vậy, Q(x) có:

- 1 là hệ số của lũy thừa bậc 4,
- 0 là hệ số của lũy thừa bậc 3,
- −3 là hệ số của lũy thừa bậc 2,
- 8 là hệ số của lũy thừa bậc 1,
- 0 là hệ số của lũy thừa bậc 0.

d. Ta có: $Q(-2) = (-2)^4 - 3(-2)^2 + 8(-2) = 16 - 12 - 16 = -12$.

$$Q(1) = 1^4 - 3.1^2 + 8.1 = 1 - 3 + 8 = 6.$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Viết một đa thức một biến và đưa ra dạng tổng quát của nó trong các trương hợp sau:

a. Có hai hạng tử mà bậc cao nhất là 8 và hệ số tự do là −5.

b. Có ba hạng tử mà hệ số cao nhất là 7 và hệ số tự do là −2.

Giải

a. Đa thức một biến có hai hạng tử mà bậc cao nhất là 8 và hệ số tự do là −5. Chẳng hạn: $x^8 - 5$; $3x^8 - 5$; ...

Vậy, dạng tổng quát của đa thức trên là: $m.x^8 - 5$, với $m \neq 0$.

b. Đa thức một biến có ba hạng tử mà hệ số cao nhất là 7 và hệ số tự do là −2. Chẳng hạn:

$$7x^2 + 5x - 2 \text{ ; } 7x^5 + 8x^2 - 2; \ldots$$

Vậy, dạng tổng quát của đa thức trên là:

$$7x^m + ax^n - 2, \text{ với } m > n \geq 1, a \neq 0 \text{ và } a < 7.$$

Ví dụ 2: Cho đa thức: $Q(x) = x^3 + 2x^4 - 6x^2 + 9 - 5x^3 + x^3 + 11$.

a. Sắp xếp các hạng tử của Q(x) theo lũy thừa giảm của biến.

b. Viết đa thức Q(x) đầy đủ từ lũy thừa bậc cao nhất đến lũy thừa bậc 0.

c. Chỉ ra các hệ số của Q(x).

d. Tính Q(−3), Q(2).

Giải

a. Thu gọn Q(x), ta được: $Q(x) = (1 - 5 + 1)x^3 + 2x^4 - 6x^2 + 11 + 9.$

$= -3x^3 + 2x^4 - 6x^2 + 10.$

Khi đó, Q(x) được sắp xếp theo lũy thừa giảm của biến là:

$Q(x) = 2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 20.$

b. Dạng đầy đủ của Q(x) là: $Q(x) = 2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 0.x + 20.$

c. Như vậy, Q(x) có:

- 2 là hệ số của lũy thừa bậc 4,
- −3 là hệ số của lũy thừa bậc 3,
- −6 là hệ số của lũy thừa bậc 2,
- 0 là hệ số của lũy thừa bậc 1,
- 20 là hệ số của lũy thừa bậc 0.

d. Ta có: $Q(-3) = 2(-3)^4 - 3(-3)^3 - 6(-3)^2 + 20 = 209.$

$Q(2) = 2.2^4 - 3.2^3 - 6.2^2 + 20 = 4.$

Ví dụ 3: Tính giá trị của đa thức sau:

a. $x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^{50}$ tại $x = -1$.

b. $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tại $x = 1$ (a, b, c, d là hằng số).

Giải

a. Thay $x = -1$ vào $x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^{50}$. Ta được:

$(-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + ... + (-1)^{50} = -1 + 1 - 1 + ... + 1 = 0.$

b. Thay $x = 1$ vào $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Ta được:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = a.1^3 + b.1^2 + c.1 + d = a + b + c + d$

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Thế nào là đa thức một biến và cho ví dụ.

Câu hỏi 2: Có bao nhiêu cách để sắp xếp một đa thức một biến.

Câu hỏi 3: Hệ số bậc cao nhất của đa thức là gì ?

Câu hỏi 4: Hệ số tự do của đa thức là gì ?

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Viết một đa thức một biến và đưa ra dạng tổng quát của nó trong các trương hợp sau:

a. Có ba hạng tử mà bậc cao nhất là 5 và hệ số tự do là 9.

b. Có bốn hạng tử mà hệ số cao nhất là 11 và hệ số tự do là 6.

Bài tập 2. Cho đa thức: $P(x) = 4x^2 + x^4 - x^2 + 50 + 2x^3 + 6x - 2x^3 + 2x + 4$.

a. Sắp xếp các hạng tử của P(x) theo lũy thừa giảm của biến.

b. Viết đa thức P(x) đầy đủ từ lũy thừa bậc cao nhất đến lũy thừa bậc 0.

c. Chỉ ra các hệ số của P(x).

d. Tính P(−2), P(1).

Bài tập 3. Cho đa thức: $Q(x) = 8 + 3x - x^2 + 9x^3 - 3x - x^2 - x^3 - 6$.

a. Sắp xếp các hạng tử của Q(x) theo lũy thừa giảm của biến.

b. Viết đa thức Q(x) đầy đủ từ lũy thừa bậc cao nhất đến lũy thừa bậc 0.

c. Chỉ ra các hệ số của Q(x).

d. Tính Q(−4), Q(3).

Bài tập 4. Cho đa thức: $R = -4xy + x^2 + 2y^2$.

a. Sắp xếp các hạng tử của R(x) theo lũy thừa giảm của biến. Chỉ ra các hệ số của R(x). Tính R(−3).

b. Sắp xếp các hạng tử của R(y) theo lũy thừa giảm của biến. Chỉ ra các hệ số của R(y). Tính R(2).

Bài tập 5. Cho đa thức: $P = ax^2 + 5x^4 - 8x + 9 - x^2 + ax$ (a là hằng số).

a. Thu gọn rồi sắp xếp các hạng tử của P(x) theo lũy thừa giảm của biến.

b. Chỉ ra các hệ số của P(x).

c. Tính P(−2).

V. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Đa thức một biến có ba hạng tử mà bậc cao nhất là 5 và hệ số tự do là 9. Chẳng hạn:

$$x^5 + x^2 + 9\ ;\ 2x^5 + 3x^4 + 9\ ;\ ...$$

Vậy, dạng tổng quát của đa thức trên là: $ax^5 + bx^n + 9$, với a, b, n $\neq 0$ và $n \geq 1$.

b. Đa thức một biến có bốn hạng tử mà hệ số cao nhất là 11 và hệ số tự do là 6. Chẳng hạn: $11x^8 + 3x^2 - 9x + 6\ ;\ 11x^3 - x^2 + 10x + 6; ...$

Vậy, dạng tổng quát của đa thức trên là:

$$11x^m + ax^n + bx^p + 6, \text{ với } m > n > p \geq 1,\ a, b \neq 0 \text{ và } a, b < 11.$$

Bài tập 2.

a. Thu gọn P(x), ta được:

$$P(x) = (4 - 1)x^2 + x^4 + (50 + 4) + (2 - 2)x^3 + (6 + 2)x = 3x^2 + x^4 + 54 + 8x.$$

Khi đó, P(x) được sắp xếp theo lũy thừa giảm của biến là:

$$P(x) = x^4 + 3x^2 + 8x + 54.$$

b. Dạng đầy đủ của P(x) là: $P(x) = x^4 + 0.x^3 + 3x^2 + 8x + 54$.

c. Như vậy, P(x) có:

- 1 là hệ số của lũy thừa bậc 4,
- 0 là hệ số của lũy thừa bậc 3,
- 3 là hệ số của lũy thừa bậc 2,
- 8 là hệ số của lũy thừa bậc 1,
- 54 là hệ số của lũy thừa bậc 0.

d. Ta có:

$$P(-2) = (-2)^4 + 3.(-2)^2 + 8.(-2) + 54 = 30.$$

$$P(1) = 1^4 + 3.1^2 + 8.1 + 54 = 66.$$

Bài tập 3.

a. Thu gọn Q(x), ta được:

$$Q(x) = (8 - 6) + (3 - 3)x - (1 + 1)x^2 + (9 - 1)x^3 = 2 - 2x^2 + 8x^3.$$

Khi đó, Q(x) được sắp xếp theo lũy thừa giảm của biến là: $Q(x) = 8x^3 - 2x^2 + 2$.

b. Dạng đầy đủ của Q(x) là: $Q(x) = 8x^3 - 2x^2 + 0.x + 2$.

c. Như vậy, Q(x) có:

- 8 là hệ số của lũy thừa bậc 3,
- −2 là hệ số của lũy thừa bậc 2,
- 0 là hệ số của lũy thừa bậc 1,
- 2 là hệ số của lũy thừa bậc 0.

d. Ta có:

$$Q(-4) = 8.(-4)^3 - 2.(-4)^2 + 2 = -542.$$

$$Q(3) = 8.3^3 - 2.3^2 + 2 = 200.$$

Bài tập 4.

a. R(x) được sắp xếp theo lũy thừa giảm của biến là: $R(x) = x^2 - 4xy + 2y^2$.

Như vậy, R(x) có:

- 1 là hệ số của lũy thừa bậc 2,
- −4y là hệ số của lũy thừa bậc 1,
- $2y^2$ là hệ số của lũy thừa bậc 0.

Ta có ngay: $R(-3) = (-3)^2 - 4.(-3).y + 2y^2 = 9 + 12y + 2y^2$.

b. R(y) được sắp xếp theo lũy thừa giảm của biến là: $R(x) = 2y^2 - 4xy + x^2$.

Như vậy, R(y) có:

- 2 là hệ số của lũy thừa bậc 2,

- $-4x$ là hệ số của lũy thừa bậc 1,
- x^2 là hệ số của lũy thừa bậc 0.

Ta có ngay: $R(2) = 2.2^2 - 4x.2 + x^2 = 8 - 8x + x^2$.

Bài tập 5.

a. Thu gọn P(x), ta được:

$$P(x) = ax^2 - x^2 + 5x^4 - 8x + ax + 9 = (a-1)x^2 + 5x^4 + (a-8)x + 9$$

Khi đó, P(x) được sắp xếp theo lũy thừa giảm của biến là:

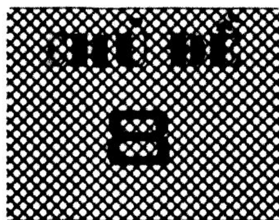
$$P(x) = 5x^4 + (a-1)x^2 + (a-8)x + 9.$$

b. Như vậy, P(x) có:

- 5 là hệ số của lũy thừa bậc 4,
- $a - 1$ là hệ số của lũy thừa bậc 3,
- $a - 8$ là hệ số của lũy thừa bậc 1,
- 9 là hệ số của lũy thừa bậc 0.

c. Ta có:

$$P(-2) = 5(-2)^4 + (a-1)(-2)^2 + (a-8)(-2) + 9$$
$$= 5.16 + (a-1).4 - (a-8).2 + 9 = 101 + 2a.$$



CỘNG, TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. CỘNG HAI ĐA THỨC MỘT BIẾN

Thí dụ 1: Cộng hai đa thức sau: $P(x) = x^2 + 12x - 16$ và $Q(x) = x + 2x^2$.

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Ta có:

$$P(x) + Q(x) = (x^2 + 12x - 16) + (x + 2x^2)$$
$$= (x^2 + 2x^2) + (12x + x) - 16 = 3x^2 + 13x - 16.$$

Cách 2: Ta đặt và thực hiện phép cộng, như sau:

Đặt các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột

$$+\ P(x) = x^2 + 12x - 16 \quad \text{Viết } P(x) \text{ theo lũy thừa giảm dần}$$
$$Q(x) = 2x^2 + x \quad \text{Viết } Q(x) \text{ theo lũy thừa giảm dần}$$
$$P(x) + Q(x) = 3x^2 + 13x - 16$$

Nhận xét: Như vậy, để thực hiện theo cách 2 ta sắp xếp các hạng tử của hai đa thức cùng theo lũy thừa giảm (hoặc tăng) của biến và đặt các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột, rồi thực hiện phép cộng theo cột dọc.

2. TRỪ HAI ĐA THỨC MỘT BIẾN

Thí dụ 2: Tính P(x)–Q(x), biết: $P(x) = x^2 + 12x - 16$ và $Q(x) = x + 2x^2$.

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Ta có: $P(x) - Q(x) = (x^2 + 12x - 16) - (x + 2x^2) = x^2 + 12x - 16 - x - 2x^2$

$$= (x^2 - 2x^2) + (12x - x) - 16 = -x^2 + 11x - 16.$$

Cách 2: Ta đặt và thực hiện phép trừ, như sau:

Đặt các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột

$$-\ P(x) = x^2 + 12x - 16 \quad \text{Viết } P(x) \text{ theo lũy thừa giảm dần}$$
$$Q(x) = 2x^2 + x \quad \text{Viết } Q(x) \text{ theo lũy thừa giảm dần}$$
$$P(x) - Q(x) = -x^2 + 11x - 16$$

Nhân xét: Như vậy, để thực hiện theo cách 2 ta sắp xếp các hạng tử của hai đa thức cùng theo lũy thừa giảm (hoặc tăng) của biến và đặt các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột, rồi thực hiện phép trừ theo cột dọc.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hai đa thức: $P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x$ và $Q(x) = x^3 + x - 1$.

Hãy tính $P(x) + Q(x)$, $P(x) - Q(x)$, $Q(x) - P(x)$.

Giải

Để tính $P(x) + Q(x)$ ta đặt:

$$\begin{array}{rl} + & P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x \\ & Q(x) = x^3 \qquad\quad + x - 1 \\ \hline & P(x) + Q(x) = 2x^3 - 5x^2 - x - 1 \end{array}$$

Để tính $P(x) - Q(x)$ ta đặt:

$$\begin{array}{rl} - & P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x \\ & Q(x) = x^3 \qquad\quad + x - 1 \\ \hline & P(x) - Q(x) = \quad -5x^2 - 3x + 1 \end{array}$$

Để tính $Q(x) - P(x)$ ta đặt:

$$\begin{array}{rl} - & Q(x) = x^3 \qquad\quad + x - 1 \\ & P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x \\ \hline & Q(x) - P(x) = \quad 5x^2 + 3x - 1 \end{array}$$

Ví dụ 2: Cho hai đa thức: $f(x) = 2x^4 + 5x^3 - x + 8;$

$g(x) = x^4 - x^2 + 3x + 9.$

Tìm đa thức $h(x)$ sao cho:

a. $f(x) - h(x) = g(x)$.

b. $h(x) - g(x) = f(x)$.

Giải

a. Ta có: $f(x) - h(x) = g(x) \Leftrightarrow h(x) = f(x) - g(x)$

$$\Leftrightarrow h(x) = (2x^4 + 5x^3 - x + 8) - (x^4 - x^2 + 3x + 9)$$

$$= 2x^4 + 5x^3 - x + 8 - x^4 + x^2 - 3x - 9$$

$$= x^4 + 5x^3 + x^2 - 4x - 1.$$

Vậy, đa thức càn tìm: $h(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 - 4x - 1$.

b. Ta có: $h(x) - g(x) = f(x) \Leftrightarrow h(x) = f(x) + g(x)$

$\Leftrightarrow h(x) = (2x^4 + 5x^3 - x + 8) + (x^4 - x^2 + 3x + 9)$

$= 2x^4 + 5x^3 - x + 8 + x^4 - x^2 + 3x + 9$

$= 3x^4 + 5x^3 + 2x + 17.$

Vậy, đa thức cần tìm: $h(x) = 3x^4 + 5x^3 + 2x + 17.$

Ví dụ 3: Cho hai biểu thức sau:

$f(x) + g(x) = 2x^4 + 5x^2 - 3x;$ (1)

$f(x) - g(x) = x^4 - x^2 + 2x.$ (2)

Tìm hai đa thức f(x) và g(x) thoả mãn hai biểu thức trên.

Giải

Ta cộng hai vế của biểu thức (1) và (2), ta được:

$2f(x) = 2x^4 + 5x^2 - 3x + x^4 - x^2 + 2x = 3x^4 + 4x^2 - x.$

$\Rightarrow f(x) = (3x^4 + 4x^2 - x) : 2 = \frac{3}{2}x^4 + 2x^2 - \frac{1}{2}x.$

Ta trừ hai vế của biểu thức (1) và (2), ta được:

$2g(x) = 2x^4 + 5x^2 - 3x - (x^4 - x^2 + 2x)$

$= 2x^4 + 5x^2 - 3x - x^4 + x^2 - 2x = x^4 + 6x^2 - 5x$

$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - \frac{5}{2}x.$

Vậy, hai đa thức cần tìm là:

$F(x) = \frac{3}{2}x^4 + 2x^2 - \frac{1}{2}x$ và $g(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - \frac{5}{2}x.$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho hai đa thức: $P(x) = 5x^3 - 13x + 10$ và $Q(x) = x^2 + 6x - 1.$

Hãy tính $P(x) + Q(x)$, $P(x) - Q(x)$, $Q(x) - P(x)$.

Bài tập 2. Cho hai đa thức: $P(x) = 8x^3 - x + 2$ và $Q(x) = x^2 + 6x - 3.$

Hãy tính $P(x) + Q(x)$, $P(x) - Q(x)$, $Q(x) - P(x)$.

Bài tập 3. Cho hai đa thức:

$f(x) = 3x^4 - 6x^3 - 2x + 7;$

$g(x) = 2x^4 + 3x^2 - x - 5.$

Tìm đa thức h(x) sao cho:

a. $f(x) - h(x) = g(x).$ b. $h(x) - g(x) = f(x).$

Bài tập 4. Cho hai biểu thức sau:

$$2f(x) + g(x) = x^3 + 6x^2 + 3x^4; \quad (1)$$

$$f(x) - g(x) = 2x^3 - x^2 + 3x^4. \quad (2)$$

Tìm hai đa thức f(x) và g(x) thoả mãn hai biểu thức trên.

Bài tập 5. Cho hai đa thức sau:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n;$$

$$g(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + ... + b_{n-1}x + b_n;$$

a. Tính f(x) + g(x).

b. Tính f(x) – g(x).

Bài tập 6. Tính f(x)–g(x) + h(x) biết:

$$f(x) = x^5 - 2x^3 + x + 3;$$

$$g(x) = 2x^4 - 3x^2 - x + 1;$$

$$h(x) = 2x^4 - 1.$$

IV. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Ta được:

$$P(x) + Q(x) = 5x^3 + x^2 - 7x + 9.$$

$$P(x) - Q(x) = 5x^3 - x^2 - 19x + 11.$$

$$Q(x) - P(x) = -5x^3 + x^2 + 19x - 11.$$

Bài tập 2. Ta được:

$$P(x) + Q(x) = 8x^3 + x^2 + 5x - 1.$$

$$P(x) - Q(x) = 8x^3 - x^2 - 7x + 5.$$

$$Q(x) - P(x) = -8x^3 + x^2 + 7x - 5.$$

Bài tập 3.

a. Ta có: $f(x) - h(x) = g(x) \Leftrightarrow h(x) = f(x) - g(x)$

$$\Leftrightarrow h(x) = (3x^4 - 6x^3 - 2x + 7) - (2x^4 + 3x^2 - x - 5)$$

$$= 3x^4 - 6x^3 - 2x + 7 - 2x^4 - 3x^2 + x + 5 = x^4 - 6x^3 - 3x^2 - x + 12.$$

Vậy, đa thức cần tìm: $h(x) = x^4 - 6x^3 - 3x^2 - x + 12$.

b. Ta có: $h(x) - g(x) = f(x) \Leftrightarrow h(x) = f(x) + g(x)$

$$\Leftrightarrow h(x) = (3x^4 - 6x^3 - 2x + 7) + (2x^4 + 3x^2 - x - 5)$$

$$= 3x^4 - 6x^3 - 2x + 7 + 2x^4 + 3x^2 - x - 5$$

$$= 5x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 3x + 2.$$

Vậy, đa thức cần tìm: $h(x) = 5x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

Bài tập 4. Ta cộng hai vế của biểu thức (1) và (2), ta được:

$$3f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x^3 + 2x^3 - x^2 + 3x^4 = 3x^3 + 5x^2 + 6x^4.$$

$$\Rightarrow P = (3x^3 + 5x^2 + 6x^4) : 3 = x^3 + \frac{5}{3}x^2 + 2x^4.$$

Ta có: $(2) \Leftrightarrow 2(f(x) - g(x)) = 2(2x^3 - x^2 + 3x^4)$

$$\Leftrightarrow 2f(x) - 2g(x) = 4x^3 - 2x^2 + 6x^4 \qquad (3)$$

Ta trừ hai vế của biểu thức (1) và (3), ta được:

$$3g(x) = x^3 + 6x^2 + 3x^3 - (4x^3 - 2x^2 + 6x^4)$$

$$= -3x^3 + 8x^2 - 3x^4.$$

$$\Rightarrow Q = -x^3 + \frac{8}{3}x^2 - x^4.$$

Bài tập 5.

a. Để tính f(x) + g(x) ta đặt:

$$+ \quad f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

$$g(x = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$$

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0)x + (a_1 + b_1)x^{n-1} + \ldots + (a_{n-1} + b_{n-1})x + a_0 + b_0$$

b. Để tính f(x) + g(x) ta đặt:

$$- \quad f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

$$g(x = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$$

$$f(x) - g(x) = (a_0 - b_0)x + (a_1 - b_1)x^{n-1} + \ldots + (a_{n-1} - b_{n-1})x + a_0 - b_0$$

Bài tập 6. Ta được:

$$f(x) - g(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + 4$$

$$f(x) - g(x) + h(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + 3.$$



NGHIỆM CỦA ĐA THỨC MỘT BIẾN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. NGHIỆM CỦA ĐA THỨC MỘT BIẾN

Thí dụ 1: Xét đa thức: $P(x) = x^2 - 4x + 3$.

Ta có: $P(0) = 3$.

$P(3) = 3^2 - 4.3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$.

Khi đó, ta nói 3 (hoặc x = 3) là một nghiệm của đa thức P(x).

Như vậy, ta có thể định nghĩa:

Nếu tại x = a, đa thức P(x) có giá trị bằng 0 thì ta nói a (hoặc x = a) là một nghiệm của đa thức đó.

Thí dụ 2: Cho đa thức: $Q(x) = x^3 - 9x$.

Kiểm nghiệm rằng đa thức Q(x) có ba nghiệm $x = -3$, $x = 0$, $x = 3$.

Giải

Ta có: $Q(-3) = (-3)^3 - 9(-3) = -27 + 27 = 0$

$\Rightarrow x = -3$ là một nghiệm của đa thức Q(x).

$Q(0) = 0 - 0 = 0 \Rightarrow x = 0$ là một nghiệm của đa thức Q(x).

$Q(3) = 3^3 - 9.3 = 27 - 27 = 0$

$\Rightarrow x = 3$ là một nghiệm của đa thức Q(x).

Chú ý:
1. Một đa thức (khác đa thức 0) có thể có 1 nghiệm, 2 nghiệm,... hoặc không có nghiệm (gọi là *vô nghiệm*).
2. Người ta chứng minh được rằng " *Một đa thức (khác đa thức 0) có số nghiệm không vượt quá bậc của nó* ". Chẳng hạn, đa thức bậc nhất chỉ có 1 nghiệm, đa thức bậc hai có không quá hai nghiệm, ...

Thí dụ 3: Chứng tỏ rằng đa thức sau vô nghiệm: $R(y) = y^2 + 2$.

Giải

Nhận xét rằng: $R(y) = y^2 + 2 \geq 0 + 2 > 0 \Rightarrow R(y)$ vô nghiệm.

Nhận xét: Với yêu cầu "*Tìm nghiệm của đa thức Q*", chúng ta cần đi thực hiện Q = 0.

Thí dụ 4: Tìm nghiệm của đa thức $P(x) = 2x + 3$.

Giải

Nghiệm của đa thức $P(x)$ thỏa mãn:

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

Vậy, $x = -\frac{3}{2}$ là nghiệm của đa thức $P(x)$.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Chứng tỏ rằng nếu $a + b + c = 0$ thì $x = 1$ là nghiệm của đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Ngoài ra nếu $a \neq 0$ thì $x = \frac{c}{a}$ cũng là nghiệm của đa thức $f(x)$.

Giải

Ta có: $f(1) = a.1^2 + b.1 + c = a + b + c = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ là nghiệm của đa thức $f(x)$.

Với $a \neq 0$, ta có:

$$f\left(\frac{c}{a}\right) = a.\left(\frac{c}{a}\right)^2 + b.\frac{c}{a} + c = \frac{c^2}{a} + \frac{bc}{a} + c = \frac{c}{a}(c + b + a) = 0$$

$\Leftrightarrow x = \frac{c}{a}$ là nghiệm của đa thức $f(x)$.

Nhận xét: áp dụng kết quả trên, ta có thể tìm được nghiệm của các đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có $a + b + c = 0$. Ví dụ sau sẽ minh họa điều này.

Ví dụ 2: Tìm các nghiệm của đa thức $f(x) = 3x^2 - 7x + 4$.

Giải

Ta có $3 - 7 + 4 = 0$, do đó đa thức $f(x)$ có các nghiệm $x = 1$ $x = \frac{4}{3}$.

Ví dụ 3: Tìm mối liên hệ của a, b, c, d để $x = 1$ là nghiệm của đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Giải

Để $x = 1$ là nghiệm của đa thức $f(x)$ điều kiện là:

$f(1) = 0 \Leftrightarrow a.1^3 + b.1^2 + c.1 + d = 0 \Leftrightarrow a + b + c + d = 0$.

Vậy, với $a + b + c + d = 0$ thì $f(x)$ nhận $x = 1$ làm nghiệm.

Ví dụ 4: Chứng tỏ rằng đa thức $x^2 + 2x + 3$ không có nghiệm.

Giải

Ta có: $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 \geq 0 + 2 > 2$.

Dó đó, đa thức $x^2 + 2x + 3$ không có nghiệm.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Khi nào thì $x = a$ là nghiệm của đa thức $P(x)$.

Câu hỏi 2: Một đa thức có bậc k có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm ?

Câu hỏi 3: Tìm số mà:

a. Bình phương của nó bằng chính nó.

b. Lập phương của nó bằng chính nó.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho đa thức: $Q(x) = x^2 - 8x + 7$.

Kiểm nghiệm rằng đa thức $Q(x)$ có ba nghiệm $x = 1$, $x = 7$.

Bài tập 2. Tìm nghiệm của các đa thức:

a. $x + 8$. b. $3x - 7$.

Bài tập 3. Tìm nghiệm của các đa thức:

a. $(x-2)(2x + 8)$. b. $(3x - 9)(2x + 5)$.

Bài tập 4. Tìm nghiệm của các đa thức:

a. $(x - 3)(x^2 + 1)$. b. $(x^2 + 2)(x^2 - 3)$.

Bài tập 5. Chứng tỏ rằng nếu $a - b + c = 0$ thì $x = -1$ là nghiệm của đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Ngoài ra nếu $a \neq 0$ thì $x = -\frac{c}{a}$ cũng là nghiệm của đa thức $f(x)$.

Bài tập 6. Tìm các nghiệm của các đa thức:

a. $f(x) = x^2 - 4x + 3$. b. $g(x) = 2x^2 - 5x + 3$.

Bài tập 7. Tìm các nghiệm của các đa thức:

a. $f(x) = x^2 + 4x + 3$. b. $g(x) = 6x^2 - 5x - 11$.

Bài tập 8. Tìm một nghiệm của các đa thức:

a. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 5$. b. $g(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

Bài tập 9. Tìm mối liên hệ của a, b, c, d để $x = -1$ là nghiệm của đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Bài tập 10. Chứng tỏ rằng các đa thức sau không có nghiệm.

a. $x^2 + 1$.

b. $x^2 - 4x + 5$.

c. $x^2 + x + 1$.

d. $x^2 - x + 1$.

V. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Ta có: $Q(1) = 1^2 - 8.1 + 7 = 1 - 8 + 7 = 0$

$\Rightarrow x = 1$ là một nghiệm của đa thức Q(x).

$Q(7) = 7^2 - 8.7 + 7 = 49 - 56 + 7 = 0$

$\Rightarrow x = 7$ là một nghiệm của đa thức Q(x).

Bài tập 2.

a. Nghiệm của đa thức x + 8 thỏa mãn: $x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -8$.

Vậy, $x = -8$ là nghiệm của đa thức x + 8.

b. Nghiệm của đa thức 3x – 7 thỏa mãn: $3x - 7 = 0 \Leftrightarrow 3x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$.

Vậy, $x = \frac{7}{3}$ là nghiệm của đa thức 3x – 7.

Bài tập 3.

a. Nghiệm của đa thức (x–2)(2x + 8) thỏa mãn:

$(x-2)(2x + 8) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0$ hoặc $2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = -4$.

Vậy, x = 2 hoặc x = –4 là nghiệm của đa thức (x–2)(2x + 8).

b. Nghiệm của đa thức (3x – 9)(2x + 5) thỏa mãn:

$(3x - 9)(2x + 5) = 0 \Leftrightarrow 3x - 9 = 0$ hoặc $2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = -\frac{5}{2}$.

Vậy, $x = 3 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$ là nghiệm của đa thức (3x – 9)(2x + 5).

Bài tập 4.

a. Nghiệm của đa thức $(x- 3)(x^2 + 1)$ thỏa mãn:

$(x- 3)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x- 3 = 0$ hoặc $x^2 + 1 = 0$ (vô nghiệm) $\Leftrightarrow x = 3$.

Vậy, x = 3 là nghiệm của đa thức $(x- 3)(x^2 + 1)$.

b. Nghiệm của đa thức $(x^2 + 2)(x^2 - 3)$ thỏa mãn:

$(x^2 + 2)(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 = 0$ (vô nghiệm) hoặc $x^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

Vậy, $x = \pm\sqrt{3}$ là nghiệm của đa thức $(x^2 + 2)(x^2 - 3)$.

Bài tập 5. Ta có: $f(-1) = a.(-1)^2 + b.(-1) + c = a - b + c = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ là nghiệm của đa thức $f(x)$.

Với $a \neq 0$, ta có:

$$f(-\frac{c}{a}) = a.\left(-\frac{c}{a}\right)^2 + b.\left(-\frac{c}{a}\right) + c = \frac{c^2a}{} - \frac{bc}{a} + c = \frac{c}{a}(c - b + a) = 0$$

$\Leftrightarrow x = -\frac{c}{a}$ là nghiệm của đa thức $f(x)$.

Với $a \neq 0$, ta có:

$$f(-\frac{c}{a}) = a.\left(-\frac{c}{a}\right)^2 + b.\left(-\frac{c}{a}\right) + c = \frac{c^2}{a} + \frac{bc}{a} + c = \frac{c}{a}(c - b + a) = 0$$

$\Leftrightarrow x = -\frac{c}{a}$ là nghiệm của đa thức $f(x)$.

Bài tập 6.

a. $x = 1, x = 3$.

b. $x = 1, x = \frac{3}{2}$.

Bài tập 7.

a. $x = -1, x = -3$.

b. $x = -1, x = \frac{11}{6}$.

Bài tập 8.

a. $x = 1$.

b. $x = 1$.

Bài tập 9.

a. Ta có: $x^2 + 1 \geq 0 + 1 > 1$.

Dó đó, đa thức $x^2 + 1$ không có nghiệm.

b. Ta có: $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \geq 0 + 1 > 1$.

Dó đó, đa thức $x^2 - 4x + 5$ không có nghiệm.

c. Ta có: $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq 0 + \frac{3}{4} > \frac{3}{4}$.

Dó đó, đa thức $x^2 + x + 1$ không có nghiệm.

d. Ta có: $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq 0 + \frac{3}{4} > \frac{3}{4}$.

Dó đó, đa thức $x^2 - x + 1$ không có nghiệm.

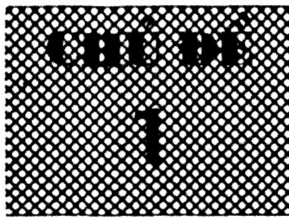
Phần 2

Hình học

CHƯƠNG I - QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY CỦA TAM GIÁC

Trong chương này, chúng ta sẽ thu nhận được kiến thức về:

1. **Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác**
2. **Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu**
3. **Quan hệ giữa ba cạnh của một tam giác - Bất đẳng thức tam giác**
4. **Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác**
5. **Tính chất tia phân giác của một góc**
6. **Tính chất ba đường phân giác của tam giác**
7. **Tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng**
8. **Tính chất ba đường trung trực của tam giác**
9. **Tính chất ba đường cao của tam giác**



QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Chúng ta đã biết tới khái niệm của tam giác cân, ở đó với ΔABC cân tại A ta có:

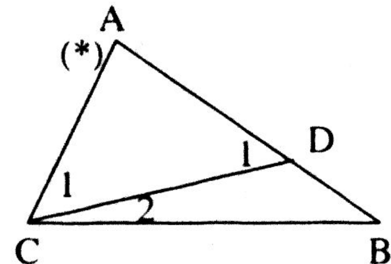
$AB = AC \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{C}$.

Một câu hỏi được đặt ra tại đây là: "*Nếu AB > AC thì* $\hat{B} > \hat{C}$ *hay* $\hat{B} < \hat{C}$ " và để trả lời câu hỏi này chúng ta cùng nhau thực hiện thí dụ sau:

Thí dụ 1: Cho ΔABC có AB > AC. Hãy so sánh hai góc $\hat{B}$ và $\hat{C}$.

Giải

Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho AD = AC, do AB > AC nên D nằm giữa A và B.



Trong ΔACD, ta có: $AC = AD \Leftrightarrow \hat{C}_1 = \hat{D}_1$

Nhận xét rằng:

$\hat{C} = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 > C_1$. (1)

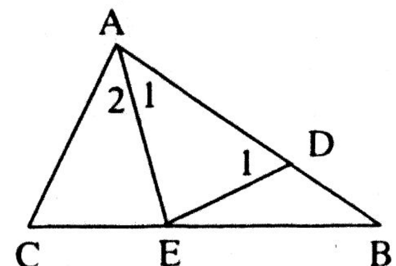
$\hat{D}_1 = \hat{B} + \hat{C}_2 > \hat{B}$. (2)

Thay (1), (2) vào (*), ta được $\hat{C} > \hat{B}$.

Nhận xét:

1. Trong ΔABC, góc $\hat{B}$ đối diện với cạnh AC, còn góc $\hat{C}$ đối diện với cạnh AB, điều này có nghĩa là " *Đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn* ".
2. Ta có thể chứng minh $\hat{C} > \hat{B}$ bằng cách khác, như sau:

   Kẻ tia phân giác AE của góc $\hat{A}$ ($E \in BC$).

   Xét hai tam giác ΔACE và ΔADE, ta có:

   AC = AD, giả thiết

   $\hat{A}_2 = \hat{A}_1$, vì AE là phân giác góc $\hat{A}$

   AE chung

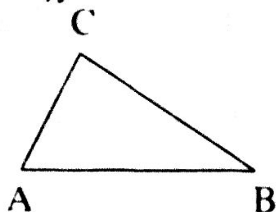
   suy ra: ΔACE = ΔADE

   $\Rightarrow \hat{C} = \hat{D}_1 > \hat{B}$, vì $\hat{D}_1$ là góc ngoài.

Từ đó, ta nhận được kết quả:

Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.

Như vậy, với ΔABC ta có:



$$AB > BC > AC \Rightarrow \widehat{C} > \widehat{A} > \widehat{B}. \ (1)$$

Thí dụ 2: So sánh các góc của ΔABC, biết $AB = 6cm$, $BC = 9cm$, $AC = 8cm$.

Giải

Ta nhận thấy rằng: $AB < AC < BC \Rightarrow \widehat{C} < \widehat{B} < \widehat{A}$.

Chú ý: Một câu hỏi được đặt ra rất tự nhiên là:

" *Chiều ngược lại của (1) thì sao ?* "

và để trả lời câu hỏi này chúng ta cùng nhau thực hiện thí dụ sau:

Thí dụ 3: Cho ΔABC có $\widehat{B} > \widehat{C}$. Chứng minh rằng $AB < AC$.

Giải

Giả sử trái lại, ta có $AB \geq AC$.

Khi đó, nhận thấy rằng:

- Nếu $AB = AC$ thì $\widehat{C} = \widehat{B}$, mâu thuẫn.
- Nếu $AB > AC$ thì $\widehat{C} > \widehat{B}$, mâu thuẫn.

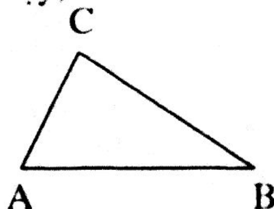
Vậy, ta luôn có $AB < AC$.

Nhận xét: Để thực hiện thí dụ trên chúng ta đã sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng và ở đó chúng ta đã tận dụng được hai định lí đã biết về góc.

Vậy, ta nhận được kết quả:

Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

Như vậy, với ΔABC có:



$$AB > BC > AC \Leftrightarrow \widehat{C} > \widehat{A} > \widehat{B}.$$

Nhận xét:

1. Trong tam giác tù (hoặc tam giác vuông), góc tù (hoặc góc vuông) là góc lớn nhất nên cạnh đối diện với góc tù (hoặc góc vuông - cạnh huyền) là cạnh lớn nhất.
2. Trong tam giác đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc nhọn.

Thí dụ 4: So sánh các cạnh của ΔABC, biết $\hat{A} = 100^0$, $\hat{B} = 40^0$.

Giải

Ta có: $\hat{C} = 180^0 - \hat{A} - \hat{B} = 180^0 - 100^0 - 40^0 = 40^0$

Khi đó, nhận thấy rằng: $\hat{B} = \hat{C} < \hat{A} \Leftrightarrow AC = AB < BC$.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: So sánh các góc của ΔABC, biết AB = 6cm, BC = 4cm, AC = 8cm.

Giải

Ta nhận thấy rằng: $BC < AB < AC \Leftrightarrow \hat{A} < \hat{C} < \hat{B}$.

Ví dụ 2: Cho ΔABC có $\hat{A} = 80^0$, $\hat{B} = 40^0$.

a. So sánh các cạnh của ΔABC.

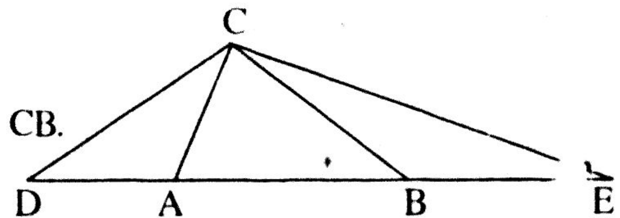
b. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho AD = AC. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho BE = BC. So sánh độ dài các đoạn CD, CB, CE.

Giải

a. Trong ΔABC, ta có: $\hat{C} = 180^0 - \hat{A} - \hat{B} = 180^0 - 80^0 - 40^0 = 60^0$.

Khi đó, nhận thấy rằng: $\hat{A} > \hat{C} > \hat{B} \Leftrightarrow BC > AB > AC$.

b. Trong ΔBCD, ta có:



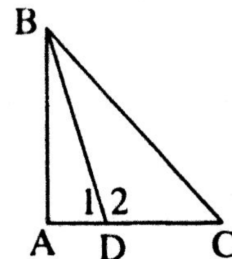
$$\hat{D} = \frac{1}{2}B\hat{A}C = 40^0 = \widehat{ABC} \Leftrightarrow CD = CB.$$

Trong ΔBCE, ta có:

$$\widehat{EBC} = 180^0 - \widehat{ABC} = 180^0 - 40^0 = 120^0 \text{ là góc tù } \Rightarrow CE > CB.$$

Vậy, ta được CD = CB < CE.

Ví dụ 3: Cho ΔABC vuông tại A. Lấy điểm D trên cạnh AC. So sánh độ dài của BC và BD.



Giải

Trong ΔABD, ta có:

$$\hat{D}_2 = \hat{A} + \widehat{ABD} \Rightarrow \hat{D}_2 \text{ là góc tù.}$$

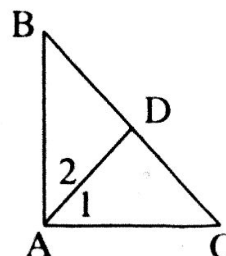
Trong ΔBCD có $\hat{D}_2$ là góc tù nên: BC > BD.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng trong tam giác vuông, trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền.

Giải

Xét ΔABC vuông tại A, trung tuyến AD. Ta cần đi chứng minh $AD = \frac{1}{2}BC$.

Giả sử trái lại, tức là $AD \neq \frac{1}{2}BC$.



- Nếu $AD > \frac{1}{2}BC$, suy ra:

  $AD > BD \Leftrightarrow \hat{B} > \hat{A}_2$; $AD > CD \Leftrightarrow \hat{C} > \hat{A}_1$,

  $\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} > \hat{A}_2 + \hat{A}_1 \Leftrightarrow 90^0 > \hat{A}$, mâu thuẫn.

- Nếu $AD < \frac{1}{2}BC$, suy ra:

  $AD < BD \Leftrightarrow \hat{B} < \hat{A}_2$; $AD < CD \Leftrightarrow \hat{C} < \hat{A}_1$,

  $\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} < \hat{A}_2 + \hat{A}_1 \Leftrightarrow 90^0 < \hat{A}$, mâu thuẫn.

Vậy, ta luôn có $AD = \frac{1}{2}BC$.

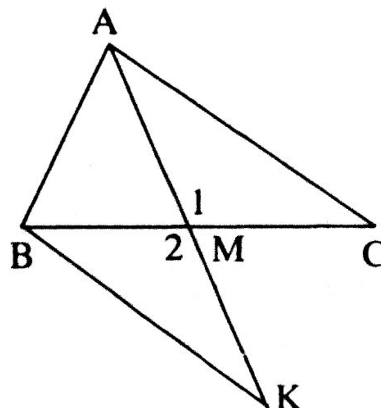
Ví dụ 5: Cho ΔABC có $AB < AC$.

a. Gọi M là trung điểm của BC. So sánh $\widehat{BAM}$ và $\widehat{CAM}$.

b. Tia phân giác của góc $\hat{A}$ cắt BC tại D. So sánh độ dài của BD và CD.

Giải

a. Trên tia AM lấy điểm K sao cho AM = KM.



Xét hai tam giác ΔAMC và ΔKMB, ta có:

AM = KM

$\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ vì đối đỉnh

CM = BM, vì M là trung điểm BC

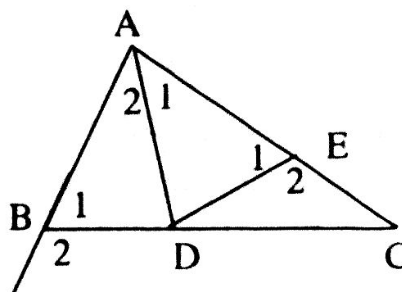
do đó $\Delta AMC = \Delta KMB$ suy ra:

$\widehat{CAM} = \widehat{BKM}$.

BK = AC > AB.

Khi đó, trong ΔABK vì: $BK > AB \Leftrightarrow \widehat{BAK} > \widehat{BKM} \Leftrightarrow \widehat{BAM} > \widehat{CAM}$.

b. Lấy điểm E trên AC sao cho AE = AB.



Xét hai tam giác ΔABD và ΔAED, ta có:

AB = AE

$\hat{A}_2 = \hat{A}_1$, vì AD là phân giác

AD chung

do đó $\Delta ABD = \Delta AED$ suy ra:

BD = DE.

$\hat{B}_1 = \hat{E}_1 \Leftrightarrow \hat{B}_2 = \hat{E}_2$ (1)

Mặt khác, ta lại có:

$\hat{B}_2 > \hat{C}$, vì $\hat{B}_2$ là góc ngoài của ΔABC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\hat{E}_2 > C$

Khi đó, trong ΔCDE vì: $\hat{E}_2 > \hat{C} \Leftrightarrow CD > DE \Leftrightarrow CD > BD$.

Nhận xét: Qua ví dụ trên chúng ta có thể đánh giá được vị trí của các tia AB, AD, AM đó là " *Tia AD nằm giữa hai tia AB và AM* ".

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Chứng minh rằng "*Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn*".

Câu hỏi 2: Chứng minh rằng "*Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn*".

Câu hỏi 3: Tại sao trong một tam giác đối diện với góc tù (hoặc góc vuông) là cạnh lớn nhất ?

Câu hỏi 4: Trong tam giác đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc gì ?

Câu hỏi 5: Sử dụng định lí Pi–ta –go chứng minh rằng trong tam giác vuông cạnh huyền có độ dài lớn nhất.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. So sánh các góc của ΔABC, biết:

a. AB = 3cm, BC = 4cm, AC = 5cm.

b. AB = 8cm, BC = 6cm, AC = 4cm.

c. AB = 11cm, BC = 4cm, AC = 8cm.

d. AB = AC = 11cm, BC = 15cm.

Bài tập 2. So sánh các cạnh của ΔABC, biết:

a. $\hat{B} = 90^0$, $\hat{C} = 45^0$.

b. $\hat{C} = 80^0$, $\hat{A} = 20^0$.

Bài tập 3. Cho ΔABC có $\hat{A} = 85^0$, $\hat{B} = 40^0$.

a. So sánh các cạnh của ΔABC.

b. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho AD = AC. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho BE = BC. So sánh độ dài các đoạn CD, CB, CE.

Bài tập 4. Cho ΔABC có $\hat{A} = 45^0$, $\hat{B} = 95^0$.

a. So sánh các cạnh của ΔABC.

b. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho AD = AC. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho BE = BC. So sánh độ dài các đoạn CD, CB, CE.

Bài tập 5. Cho ΔABC có góc B tù. Lấy điểm D trên cạnh BC. Chứng minh rằng AB < AD < AC.

Bài tập 6.

a. Chứng minh rằng trong một tam giác vuông có một góc bằng 30^0 thì cạnh góc vuông đối diện với góc 30^0 bằng một phần hai cạnh huyền.

b. Áp dụng: Cho ΔABC có $\hat{A} = 60^0$, các góc $\hat{B}$, $\hat{C}$ đều nhọn. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AC, AB. Kẻ các đường cao BH, CK. Xác định dạng của các tam giác ΔAHN, ΔAKM.

Bài tập 7. Cho ΔABC vuông tại B. Tia phân giác của góc $\widehat{A}$ cắt BC tại D. So sánh độ dài của BD và CD.

Bài tập 8. Cho ΔABC. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D. So sánh độ dài của AB và BC, biết rằng góc $\widehat{BDC}$ tù.

Bài tập 9. Cho ΔABC có BC = a, AC = b và các chiều cao tương ứng với hai cạnh đó theo thứ tự bằng h_a, h_b.

a. Tìm tam giác có $h_a = a$, $h_b = b$.

b. Có thể khẳng định được $h_b < a$ không ?

c. Có nhận xét gì về quan hệ độ dài giữa h_a và b, giữa h_b và a ?

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Vì AB < BC < AC nên $\hat{C} < \hat{A} < \hat{B}$.

b. Vì AB > BC > AC = 4cm nên $\hat{C} > \hat{A} > \hat{B}$.

c. Vì BC < AC < AB nên $\hat{A} < \hat{B} < \hat{C}$.

d. Vì AB = AC < BC nên $\hat{C} = \hat{B} < \hat{A}$.

Bài tập 2.

a. Ta có: $\hat{A} = 180^0 - \hat{B} - \hat{C} = 180^0 - 90^0 - 45^0 = 45^0$.

Khi đó, nhận thấy rằng: $\hat{A} = \hat{C} < \hat{B} \Leftrightarrow BC = AB < AC$.

b. Ta có: $\hat{B} = 180^0 - \hat{A} - \hat{C} = 180^0 - 20^0 - 80^0 = 100^0$.

Khi đó, nhận thấy rằng: $\hat{A} < \hat{C} < \hat{B} \Leftrightarrow BC < AB < AC$.

Bài tập 3.

a. Ta có: $\widehat{C} = 180^0 - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^0 - 85^0 - 40^0 = 55^0$.

Khi đó, nhận thấy rằng: $\widehat{B} < \widehat{C} < \widehat{A} \Leftrightarrow AC < AB < BC$.

b. *Học sinh tự làm.*

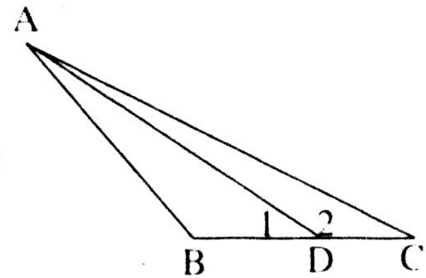
Bài tập 4.

a. Ta có: $\widehat{C} = 180^0 - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^0 - 45^0 - 95^0 = 40^0$.

Khi đó, nhận thấy rằng: $\widehat{C} < \widehat{A} < \widehat{B} \Leftrightarrow AB < BC < AC$.

b. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 5. Ta lần lượt xét:



- Trong ΔABD có góc $\widehat{B}$ tù, do đó:

  $\widehat{D_1} < \widehat{B} \Leftrightarrow AB < AD.$ (1)

- Trong ΔADC, ta có :

  $\widehat{D_2} > \widehat{B}$, vì $\widehat{D_2}$ là góc ngoài ΔABD

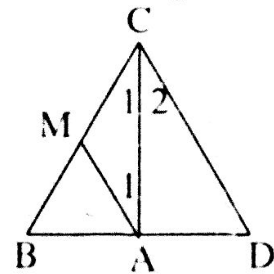
  $\widehat{B} > \widehat{C}$, vì ΔABC, có góc $\widehat{B}$ tù

  $\Rightarrow \widehat{C} < \widehat{D_2} \Leftrightarrow AD < AC.$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $AB < AD < AC$, đpcm.

Bài tập 6.

a. Giả sử ΔABC vuông tại A có $\widehat{C} = 30^0$, ta cần đi chứng minh $AB = \frac{1}{2}BC$. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:



Cách 1: Trên BC lấy điểm M sao cho AB = MB

$\Rightarrow \Delta ABM$ là tam giác cân

$\Rightarrow \Delta ABM$ là tam giác đều vì có $\widehat{B} = 60^0$

$\Leftrightarrow AB = BM = MA.$

Trong ΔMAC, ta có:

$\widehat{A}_1 = 90^0 - 60^0 = 30^0 = \widehat{C}_1 \Leftrightarrow \Delta MAC$ cân tại M $\Leftrightarrow MA = MC$.

Khi đó: $BC = BM + CM = AB + AB \Leftrightarrow AB = \frac{1}{2}BC$. đpcm.

Cách 2: Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho AB = AD.

Nhận xét rằng ΔBCD có đường cao CA cũng là đường trung tuyến nên:

ΔBCD là tam giác cân $\Rightarrow \Delta BCD$ là tam giác đều vì có $\widehat{B} = 60^0$

Khi đó: $BC = BD = 2AB \Leftrightarrow AB = \frac{1}{2}BC$. đpcm.

b. Đề nghị học sinh tự vẽ hình.

Ta lần lượt xét:

- Trong ΔHAB vuông tại H, ta có:

$$\widehat{A} = 60^0 \Leftrightarrow \widehat{ABH} = 30^0 \Leftrightarrow AH = \frac{1}{2}AB = AN.$$

Vậy, tam giác ΔAHN là tam giác đều vì nó là tam giác cân có góc $\widehat{A} = 60^0$.

- Trong ΔKAC vuông tại K, ta có:

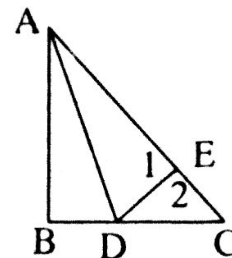
$$\widehat{A} = 60^0 \Leftrightarrow \widehat{ACK} = 30^0 \Leftrightarrow AK = \frac{1}{2}AC = AM.$$

Vậy, tam giác ΔAKM là tam giác đều vì nó là tam giác cân có góc $\widehat{A} = 60^0$.

Nhận xét: Qua bài tập trên, chúng ta thu nhận được một kết quả:

" Trong một tam giác vuông có một góc bằng 30^0 thì cạnh đối diện với góc 30^0 bằng bằng nửa cạnh huyền và ngược lại ".

Bài tập 7. Lấy điểm E trên AC sao cho AE = AB.



Xét hai tam giác ΔABD và ΔAED, ta có:

AB = AE

$\widehat{A}_2 = \widehat{A}_1$, vì AD là phân giác

AD chung

do đó $\Delta ABD = \Delta AED$ suy ra:

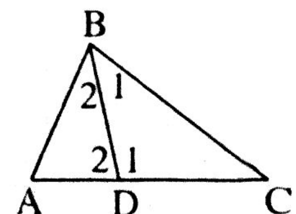
BD = DE.

$\hat{E}_1 = \hat{B} = 90^0 \Rightarrow \hat{E}_2 = 90^0$.

Khi đó, trong ΔCDE vì: $\hat{E}_2 = 90^0 \Rightarrow CD > DE \Leftrightarrow CD > BD$.

Bài tập 8. Để so sánh độ dài của AB và BC, ta cần đi so sánh hai góc $\widehat{C}$ và $\widehat{A}$.

Theo giả thiết góc $\widehat{BDC}$ tù, tức là: $\widehat{D}_1 > 90^0 \Leftrightarrow 2\widehat{D}_1 > 180^0$.



Trong ΔABD, ta có: $\widehat{D}_1 = \widehat{A} + \hat{B}_2$ (1)

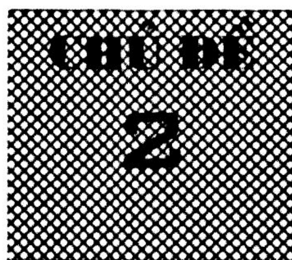
Trong ΔBCD, ta có: $\widehat{D}_1 + \hat{B}_1 + \widehat{C} = 180^0$. (2)

Cộng theo vế (1) và (2), ra được:

$$2\widehat{D}_1 + \hat{B}_1 + \widehat{C} = \widehat{A} + \hat{B}_2 + 180^0$$

$$\Leftrightarrow \widehat{A} - \widehat{C} = 2\widehat{D}_1 - 180^0 > 0 \Leftrightarrow \widehat{A} > \widehat{C} \Leftrightarrow BC > AB.$$

Yêu cầu: Các em học sinh hãy thực hiện bài tập trên bằng một cách khác.

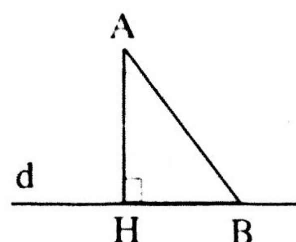


QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN, ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. KHÁI NIỆM ĐƯỜNG VUÔNG GÓC, ĐƯỜNG XIÊN, HÌNH CHIẾU CỦA ĐƯỜNG XIÊN

Chúng ta bắt đầu bằng việc, từ điểm A ở ngoài đường thẳng d, kẻ đường thẳng vuông góc với d tại H. Trên d lấy điểm B bất kì (B ≠ H). Khi đó:



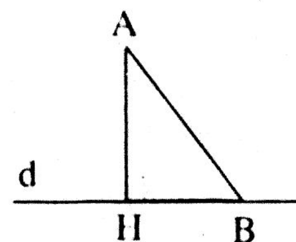
- Đoạn thẳng AH gọi là *đoạn vuông góc* hay *đường vuông góc* kẻ từ điểm A đến đường thẳng d. Điểm H được gọi là *chân* đường vuông góc hay *hình chiếu* của A trên đường thẳng d.
- Đoạn thẳng AB gọi là một *đường xiên* kẻ từ điểm A đến đường thẳng d.
- Đoạn thẳng HB gọi là *hình chiếu* của đường xiên AB trên đường thẳng d.

Nhận xét:

1. Chúng ta đã biết rằng "*Qua điểm A nằm ngoài đường thẳng d kẻ được duy nhất một đường thẳng vuông góc với d*", do đó, qua A kẻ được duy nhất một đường vuông góc tới d.
2. Vì với mỗi điểm B (B ≠ H) thuộc d, ta nhận được một đường xiên, do đó qua A có vô số đường xiên tới d.

2. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN

Trong phần này, chúng ta đi thiết lập mối quan hệ về độ dài giữa đường vuông góc và đường xiên.



Nhìn vào hình vẽ, bằng trực quan chúng ta thấy ngay AH < AB, và để chứng minh điều này bằng ngôn ngữ toán học chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác

Trong ΔHAB vuông tại H, ta có: $\hat{B} < \hat{H} = 90^0 \Leftrightarrow AH < AB$, đpcm.

Cách 2: Sử dụng định lí Pi–ta–go

Trong ΔHAB vuông tại H, ta có:

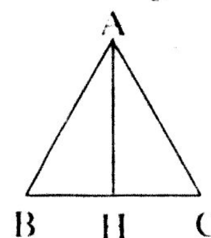
$$AB^2 = AH^2 + BH^2 > AH^2 \Leftrightarrow AB > AH, \text{ đpcm.}$$

Như vậy, ta có kết quả:

> *Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất.*

Chú ý: Độ dài đường vuông góc AH gọi là *khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d.*

Thí dụ 1: Cho ΔABC có AB = AC = 5cm, BC = 8cm. Tính khoảng cách từ A đến BC.



Giải

Gọi H là hình chiếu của A lên BC, khi đó AH chính là khoảng cách từ A đến BC.

Trong ΔHAB vuông tại H, ta có: $BH = \frac{1}{2}BC = 4cm$, vì ΔABC cân tại A

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \Leftrightarrow AH = 3cm.$$

Vậy, khoảng cách từ A đến BC bằng 3cm.

Nhận xét: Như vậy, chúng ta đã thiết lập được mối quan hệ về độ dài giữa đường vuông góc và đường xiên, và một câu hỏi lại tiếp tục được đặt ra là "*Mối quan hệ giữa hai đường xiên với nhau thì sao?*". Như trong thí dụ trên thì :

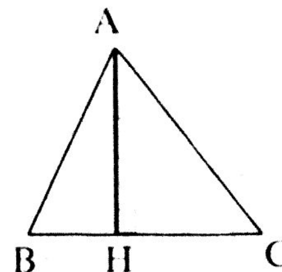
AB = AC - *Hai đường xiên bằng nhau*

⇔ HB = HC - *Hai hình chiếu bằng nhau*

Câu hỏi này sẽ được trả lời trong mục sau.

3. CÁC ĐƯỜNG XIÊN VÀ CÁC HÌNH CHIẾU CỦA CHÚNG

Thí dụ 2: Cho hình vẽ, hãy chứng tỏ rằng:



a. Nếu HB < HC thì AB < AC và ngược lại, nếu AB < AC thì HB < HC.

b. Nếu HB = HC thì AB = AC và ngược lại, nếu AB = AC thì HB = HC.

Giải

Trong các tam giác ΔHAB vuông tại H và ΔHAC vuông tại H, ta có:

$HB^2 = AB^2 - AH^2$; $HC^2 = AC^2 - AH^2$.

a. Với giả thiết:

$HB < HC \Leftrightarrow HB^2 < HC^2 \Leftrightarrow AB^2 - AH^2 < AC^2 - AH^2$

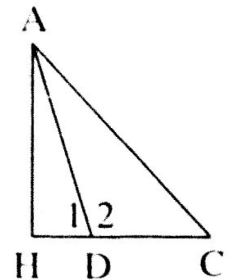
$\Leftrightarrow AB^2 < AC^2 \Leftrightarrow AB < AC$, đpcm.

b. Với giả thiết:

$HB = HC \Leftrightarrow HB^2 = HC^2 \Leftrightarrow AB^2 - AH^2 = AC^2 - AH^2$

$\Leftrightarrow AB^2 = AC^2 \Leftrightarrow AB = AC$, đpcm.

Chú ý: Ta cũng có thể chứng minh được " *Nếu HB < HC thì AB < AC* " bằng việc sử dụng mối quan hệ góc với cạnh đối diện trong tam giác. Thật vậy:



Lấy điểm D trên HC sao cho HB = HD, suy ra

ΔABD cân tại A ⇔ AB = AD.

Trong ΔAHD, ta có:

$\widehat{D_2} = \widehat{H} + \widehat{HAD} \Rightarrow \widehat{D_2}$ là góc tù.

Trong ΔACD có $\widehat{D_2}$ là góc tù nên: $AC > AD \Leftrightarrow AC > AB$.

Như vậy, ta có kết quả:

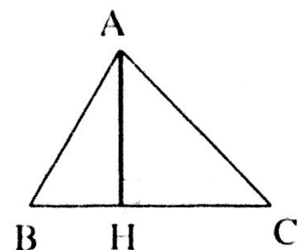
Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó:

a. *Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.*

b. *Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn.*

c. *Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau, và ngược lại, nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.*

Thí dụ 3: Cho ΔABC vuông tại A có AB = 6cm, BC = 10cm. Gọi H là hình chiếu của A lên BC. Chứng tỏ rằng HC > HB.



Giải

Trong ΔABC vuông tại C, ta có:

$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$

$\Leftrightarrow AC = 8cm$

$\Rightarrow AC > AB \Leftrightarrow HC > HB$, đpcm.

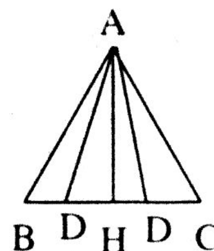
Nhận xét: Trong thí dụ trên, nếu chúng ta không sử dụng tính chất về mối liên hệ giữa hình chiếu và đường xiên thì chúng ta cần đi xác định độ dài các đoạn thẳng BH và CH, để thực hiện công việc này rất cồng kềnh.

Thí dụ 4: Chứng minh rằng trong một tam giác cân, độ dài đoạn thẳng nối đỉnh đối diện với đáy và một điểm bất kì của cạnh đáy nhỏ hơn hoặc bằng độ dài của cạnh bên.

Giải

Xét ΔABC cân tại A, lấy một điểm D bất kì trên cạnh BC, chúng ta cần đi chứng minh $AD \leq AB$.

Gọi H là hình chiếu của A lên BC.



- Nếu D thuộc cạnh BH thì $DH \leq BH \Leftrightarrow AD \leq AB$.
- Nếu D thuộc cạnh CH thì

$$DH \leq CH \Leftrightarrow AD \leq AC \Leftrightarrow AD \leq AB.$$

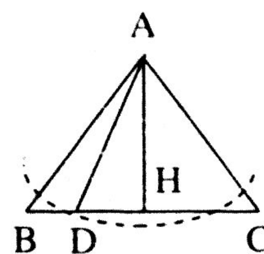
II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC có $AB = AC = 10cm$, $BC = 12cm$.

a. Tính khoảng cách từ A đến BC.

b. Vẽ cung tròn tâm A có bán kính bằng 9cm. Cung đó có cắt đường thẳng BC hay không, có cắt cạnh BC hay không ? Vì sao ?

Giải



a. Gọi H là hình chiếu của A lên BC, khi đó AH chính là khoảng cách từ A đến BC.

Trong ΔHAB vuông tại H, ta có:

$$BH = \frac{1}{2}BC = 6cm, \text{ vì } \Delta ABC \text{ cân tại A}$$

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

$\Leftrightarrow$ $AH = 8cm$.

Vậy, khoảng cách từ A đến BC bằng 8cm.

b. Theo kết quả câu a), ta có:

$AH < 9cm \Rightarrow$ cung tròn tâm A bán kính 9cm cắt đường thẳng BC.

Giả sử cung tròn đó cắt đường thẳng BC lại D, suy ra:

$AD = 9cm < AB \Leftrightarrow DH < BH$

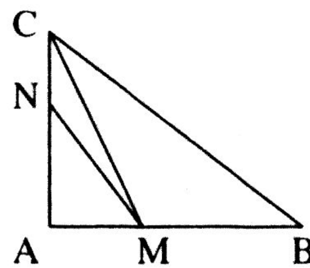
Vậy, cung tròn tâm A bán kính 9cm cắt cạnh BC.

Nhận xét: Qua ví dụ trên, ta thấy:

1. Một cung tròn tâm A bán kính R sẽ cắt đường thẳng a nếu khoảng cách từ A đến đường thẳng a lớn hơn R.
2. Để xét xem cung tròn tâm A bán kính R có cắt đoạn thẳng BC hay không, chúng ta cần so sánh R với các đường xiên AB và AC.

Ví dụ 2: Cho ΔABC vuông tại A. Trên cạnh AB lấy điểm M ($M \neq B$), trên cạnh AC lấy điểm N ($N \neq C$). Chứng minh rằng $MN < BC$.

Giải



Nhận xét rằng:

- AM, AB theo thứ tự là hình chiếu của CM và CB, ta có: $AM < AB \Leftrightarrow CM < CB$. (1)
- AN, AC theo thứ tự là hình chiếu của MN và MC, ta có: $AN < AC \Leftrightarrow MN < MC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MN < BC$, đpcm.

Chú ý:

1. Kết quả trên vẫn đúng khi thay "*ΔABC vuông tại A*" bằng:

   "*ΔABC có $\hat{A}$ tù*" hoặc "*ΔABC cân tại C*"

   hoặc "*ΔABC có $\hat{A}$ $\widehat{A} \geq \hat{B}$*".

2. Ta có thể sử dụng mối quan hệ về góc và cạnh đối diện trong tam giác để thực hiện ví dụ trên. Thật vậy:

   - Trong ΔBCM có góc $\widehat{BMC}$ là góc tù, do đó:

     $CM < CB$. (3)

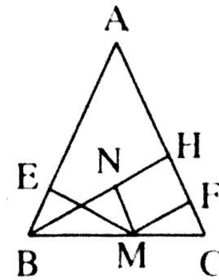
   - Trong ΔCMN có góc $\widehat{CNM}$ là góc tù, do đó:

     $MN < CM$. (4)

   Từ (3) và (4) suy ra $MN < BC$, đpcm.

Ví dụ 3: Cho ΔABC cân tại A. Gọi M là điểm bất kì trên cạnh đáy BC. Chứng minh rằng khi M thay đổi vị trí trên cạnh BC thì tổng các khoảng cách từ M đến hai cạnh bên AB và AC vẫn không đổi.

Giải



Kẻ đường cao BH, ME ⊥ AB, MF ⊥ AC.

Kẻ MN // AC (N ∈ BH), suy ra:

MN ⊥ BH và MF = NH. (1)

Xét hai tam giác vuông ΔBEM và ΔMNB, ta có:

BM chung

$\widehat{BMN} = \hat{C} = \hat{B}$

do đó ΔBEM = ΔMNB (cạnh huyền và góc nhọn), suy ra:

ME = BN. (2)

Cộng theo vế (1), (2), ta được: MF + ME = NH + BN = BH – không đổi.

Vậy, khi M thay đổi vị trí trên cạnh BC thì tổng các khoảng cách từ M đến hai cạnh bên AB và AC vẫn không đổi.

<u>Ví dụ 4:</u> Cho ΔABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm AC. Gọi E, F theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ A và C đến đường thẳng BM.

a. So sánh AC với tổng AE + CF.

b. Chứng minh rằng AB < $\frac{1}{2}$(BE + BF).

Giải

a. Ta lần lượt thấy:

- Trong tam giác vuông ΔEAM, ta có:

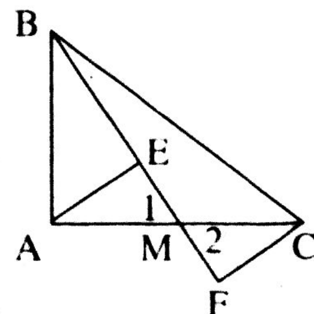
  AM > AE. (1)

- Trong tam giác vuông ΔFCM, ta có:

  CM > CF. (2)

Cộng theo vế (1), (2), ta được: AM + CM > AE + CF ⇔ AC > AE + CF.

b. Xét hai tam giác vuông ΔEAM và ΔFCM, ta có:



AM = CM, vì M là trung điểm AC

$\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ vì đối đỉnh

do đó ΔEAM = ΔFCM (cạnh huyền và góc nhọn),

suy ra: EM = FM.

Trong tam giác vuông ΔABM, ta có:

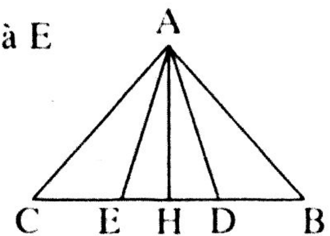
$AB < BM$ và vì $BM = BE + EM$ nên $AB < BE + EM$. (3)

$AB < BM$ và vì $BM = BF - FM$ nên $AB < BF - FM$. (4)

Cộng theo vế (3), (4) và sử dụng kết quả $EM = FM$, ta được:

$$2AB < BE + BF \Leftrightarrow AB < \frac{1}{2}(BE + BF), \text{ đpcm.}$$

Chú ý:
1. Kết quả câu a) vẫn đúng khi "*ΔABC tùy ý và M là điểm bất kì trên AC*".
2. Kết quả câu b) vẫn đúng khi "*ΔABC có góc $\hat{A}$ tù*".



Ví dụ 5: Cho ΔABC cân tại A. Trên BC lấy các điểm D và E sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{DAE} = \widehat{EAC}$. So sánh các độ dài:

a. AB và AE.

b. BD và DE.

Giải

Ta có: $\hat{B} = \hat{C}$ vì ΔABC cân tại A

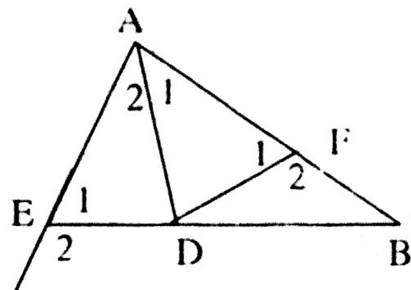
$\widehat{BAD} = \widehat{EAC}$, giả thiết

suy ra: $\widehat{ADB} = \widehat{AEC} \Leftrightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AED} \Leftrightarrow \Delta ADE$ cân tại A.

Khi đó, gọi H là trung điểm DE thì $AH \perp DE$.

a. Vì BH, DH theo thứ tự là hình chiếu của AB và AD, ta có:

$BH > DH \Leftrightarrow AB > AD \Leftrightarrow AB > AE$, vì $AD = AE$.



b. Lấy điểm F trên AB sao cho $AE = AF$.

Xét hai tam giác ΔAED và ΔAFD, ta có:

$AF = AE$

$\hat{A}_2 = \hat{A}_1$, giả thiết

AD chung

do đó $\Delta AED = \Delta AFD$ suy ra: $DE = DF$.

$\hat{E}_1 = \hat{F}_1 \Leftrightarrow \hat{E}_2 = \hat{F}_2$ (1)

Mặt khác, ta lại có: $\hat{E}_2 > \hat{B}$, vì $\hat{E}_2$ là góc ngoài của ΔABE. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{F}_2 > \widehat{B}$

Khi đó, trong ΔBDF vì: $\widehat{F}_2 > \widehat{B} \Leftrightarrow BD > DF \Leftrightarrow BD > DE$.

Ví dụ 6: Cho ΔABC có $AB < AC$, Phân giác AD, trung tuyến AM, đường cao AH.

a. So sánh độ dài của HB và HC.

b. Chứng minh rằng $\widehat{HAC} > \frac{\widehat{A}}{2}$.

c. Nhận xét gì về vị trí của các tia AH, AD, AM.

Giải

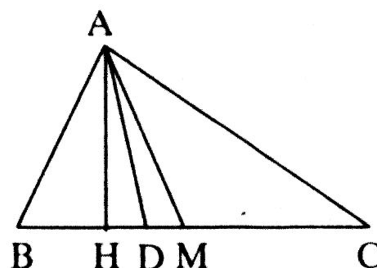
a. Trong ΔABC với giả thiết $AB < AC$, suy ra $HB < HC$.

b. Trong ΔABC với giả thiết $AB < AC$, suy ra: $\widehat{B} < \widehat{C} \Leftrightarrow \widehat{C} - \widehat{B} > 0$

Trong ΔAHC vuông tại H, ta có:

$$\widehat{HAC} = 90^0 - \widehat{C} = \frac{1}{2}\left(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}\right) - \widehat{C}$$

$$= \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{C} - \widehat{B}}{2} > \frac{\widehat{A}}{2}, \text{ đpcm}$$



c. Ta có nhận xét: $\widehat{CAM} < \widehat{CAD} = \frac{\widehat{A}}{2} < \widehat{CAH}$

do đó AD nằm giữa hai tia AH và AM.

Nhận xét: Qua ví dụ trên, ta thấy:

"Trong ΔABC có không cân tại A thì tia phân giác của góc $\widehat{A}$ và đường trung trực cạnh BC bao giờ cũng cắt nhau tại một điểm nằm ngoài tam giác".

Nhận xét trên, sẽ giúp các em học sinh tránh mắc sai lầm khi vẽ hình.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu khái niệm đường vuông góc, đường xiên, hình chiếu của đường xiên.

Câu hỏi 2: Nêu định nghĩa khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng.

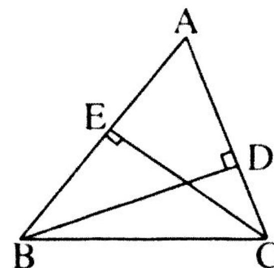
Câu hỏi 3: Qua điểm A nằm ngoài đường thẳng d kẻ được bao nhiêu đường thẳng vuông góc với d ? Vì sao ?

Câu hỏi 4: Qua điểm A nằm ngoài đường thẳng d kẻ được bao nhiêu đường xiên tới d ? Vì sao ?

Câu hỏi 5: Phát biểu và chứng minh mối quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên.

Câu hỏi 6: Phát biểu và chứng minh mối quan hệ giữa các đường xiên và các hình chiếu của chúng.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ



Bài tập 1. Cho hình vẽ sau. Chứng minh rằng
AB + AC > BD + CE.
Hãy phát biểu kết quả tổng quát.

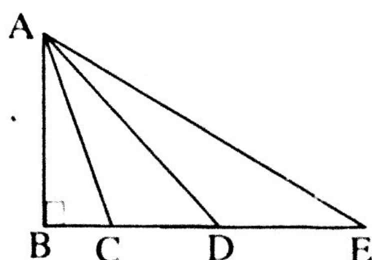
Bài tập 2. Cho ΔABC. Tính khoảng cách từ A đến BC, biết:

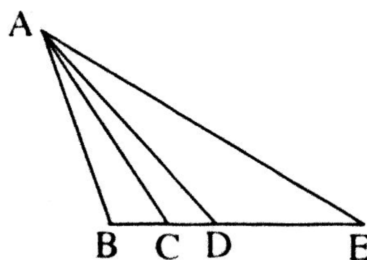
a. AB = AC = 5cm, BC = 6cm.

b. AB = 15cm, AC = 20cm, BC = 25cm.

Bài tập 3. Cho ΔABC đều có cạnh bằng a. Tính khoảng cách từ mỗi đỉnh đến cạnh đối diện của tam giác.

Bài tập 4. Cho các hình vẽ sau. So sánh các độ dài AB, AC, AD, AE.





Bài tập 5. Cho ΔABC cân tại A, có AB = 5cm, BC = 6cm.

a. Tính khoảng cách từ A đến BC.

b. Vẽ cung tròn tâm A có bán kính bằng 6cm. Cung đó có cắt đường thẳng BC hay không, có cắt cạnh BC hay không ? Vì sao ?

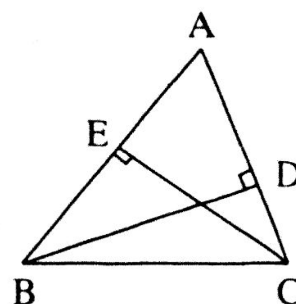
Bài tập 6. Cho ΔABC cân tại C. Trên cạnh AB lấy điểm M (M ≠ B), trên cạnh AC lấy điểm N (N ≠ C). Chứng minh rằng MN < BC.

Bài tập 7. Cho ΔABC có $\widehat{A} > \widehat{B}$. Trên cạnh AB lấy điểm M (M ≠ B), trên cạnh AC lấy điểm N (N ≠ C). Chứng minh rằng MN < BC.

Bài tập 8. Cho ΔABC, điểm M nằm giữa A và C. Gọi E, F theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ A và C đến đường thẳng BM. So sánh AC với tổng AE + CF.

Bài tập 9. Cho ΔABC có góc $\widehat{A}$ tù. Gọi M là trung điểm AC. Gọi E, F theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ A và C đến đường thẳng BM. Chứng minh rằng $AB < \frac{1}{2}(BE + BF)$.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ



Bài tập 1. Ta lần lượt nhận thấy:

- Trong tam giác vuông ΔABD, ta có: $AB > BD$. (1)
- Trong tam giác vuông ΔACE, ta có: $AC > CE$. (2)

Cộng theo vế (1), (2), ta được: $AB + AC > BD + CE$.

Tổng quát: Trong một tam giác tổng ba cạnh lớn hơn tổng ba đường cao.

Bài tập 2.

a. Gọi H là hình chiếu của A lên BC, khi đó AH chính là khoảng cách từ A đến BC.

Trong ΔHAB vuông tại H, ta có:

$$BH = \frac{1}{2}BC = 3cm, \text{ vì } \Delta ABC \text{ cân tại A}$$

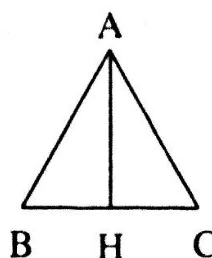
$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow AH = 4cm.$$

Vậy, khoảng cách từ A đến BC bằng 4cm.

b. Khoảng cách từ A đến BC bằng 12cm.

Bài tập 3. Vì ΔABC đều nên khoảng cách từ mỗi đỉnh đến cạnh đối diện của tam giác là bằng nhau, do đó ta cần tính khoảng cách từ A đến BC.

Gọi H là hình chiếu của A lên BC, khi đó AH chính là khoảng cách từ A đến BC.



Trong ΔHAB vuông tại H, ta có:

$$BH = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}, \text{ vì } \Delta ABC \text{ đều}$$

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

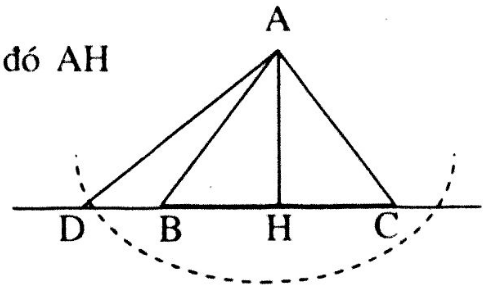
Vậy, khoảng cách từ mỗi đỉnh đến cạnh đối diện của tam giác bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Nhận xét: Qua bài tập trên, chúng ta ghi nhận được một kết quả "*Trong một tam giác đều cạnh bằng a thì độ dài đường cao bằng* $\frac{a\sqrt{3}}{2}$".

Bài tập 4.

a. AB < AC < AD < AE. b. AB < AC < AD < AE.

Bài tập 5.



d. Gọi H là hình chiếu của A lên BC, khi đó AH chính là khoảng cách từ A đến BC.

Trong ΔHAB vuông tại H, ta có:

$BH = \frac{1}{2}BC = 3cm$, vì ΔABC cân tại A

$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow AH = 4cm$.

Vậy, khoảng cách từ A đến BC bằng 4cm.

e. Theo kết quả câu a), ta có:

AH < 6cm ⇒ cung tròn tâm A bán kính 6cm cắt đường thẳng BC.

Giả sử cung tròn đó cắt đường thẳng BC lại D, suy ra:

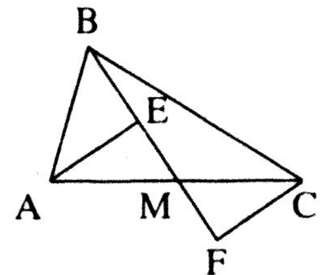
AD = 6cm > AB ⇔ DH > BH

Vậy, cung tròn tâm A bán kính 6cm không cắt cạnh BC.

Bài tập 6. *Học sinh tự làm* - Tham khảo ví dụ 2.

Bài tập 7. *Học sinh tự làm* - Tham khảo ví dụ 2.

Bài tập 8. Ta lần lượt thấy:



- Trong tam giác vuông ΔEAM, ta có: AM > AE. (1)
- Trong tam giác vuông ΔFCM, ta có: CM > CF. (2)

Cộng theo vế (1), (2), ta được:

AM + CM > AE + CF ⇔ AC > AE + CF.

Bài tập 9. Đề nghị hàm số tự vẽ hình với lưu ý góc Â tù.

Xét hai tam giác vuông ΔEAM và ΔFCM, ta có:

AM = CM, vì M là trung điểm AC

$\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$, vì đối đỉnh

do đó ΔEAM = ΔFCM (cạnh huyền và góc nhọn), suy ra: EM = FM.

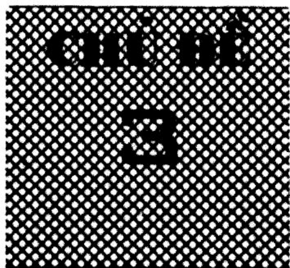
Trong tam giác ΔABM do Â là góc tù nên ta có:

AB < BM ⇔ AB < BE + EM. (1)

AB < BM ⇔ AB < BF – FM. (2)

Cộng theo vế (1), (2) và sử dụng kết quả EM = FM, ta được:

$2AB < BE + BF \Leftrightarrow AB < \frac{1}{2}(BE + BF)$, đpcm.



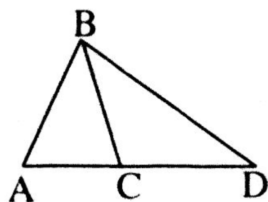
QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

Nhìn vào hình vẽ, bằng trực quan chúng ta thấy ngay việc di chuyển từ A tới B theo đường thẳng ngắn hơn đi theo đường gấp khúc ACB, tức là $AB < AC + CB$, chúng ta sẽ đi chứng minh nhận định này bằng ngôn ngữ toán học như sau:

Xét ΔABC, trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho $CD = CB$.



Ta có: $\widehat{ABD} > \widehat{CBD}$

Mặt khác, ta lại có: $CB = CD \Leftrightarrow \Delta CBD$ cân tại C

$\Leftrightarrow \widehat{CBD} = \widehat{CDB}$

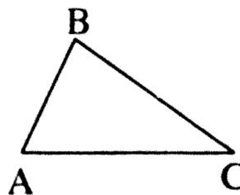
Trong ΔABD, ta có: $\widehat{ADB} = \widehat{CDB} = \widehat{CBD} < \widehat{ABD}$

$\Leftrightarrow AB < AD = AC + CD \Leftrightarrow AB < AC + CB$, đpcm.

Như vậy, ta có kết quả:

> *Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng lớn hơn độ dài cạnh còn lại.*

Tức là, với ΔABC ta luôn có:



$AB + BC > AC.$

$AB + AC > BC.$

$AC + BC > AB.$

Thí dụ 1: Dựa vào bất đẳng thức tam giác, kiểm tra xem bộ ba nào trong các bộ ba đoạn thẳng có độ dài cho sau đây là độ dài ba cạnh của tam giác và hãy dựng tam giác đó.

a. 2cm, 4cm, 7cm. b. 2cm, 6cm, 4cm. c. 3cm, 4cm, 5cm.

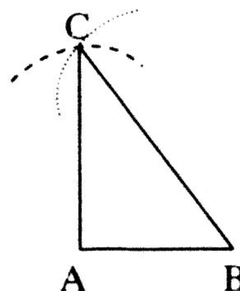
Giải

a. Đây không phải độ dài của ba cạnh tam giác bởi: $2 + 4 < 7$.

b. Đây không phải độ dài của ba cạnh tam giác bởi: $2 + 4 = 6$.

c. Đây chính là độ dài của ba cạnh tam giác bởi:

$$3 + 4 > 5, \quad 3 + 5 > 4, \quad 4 + 5 > 3.$$



Giả sử cần dựng ΔABC, biết $AB = 3cm$, $AC = 4cm$, $BC = 5cm$, ta lần lượt thực hiện:

- Dựng đoạn $AB = 3cm$.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB dựng các cung tròn tâm A bán kính 4cm và cung tròn tâm B bán kính 5cm. Hai cung này cắt nhau tại C.

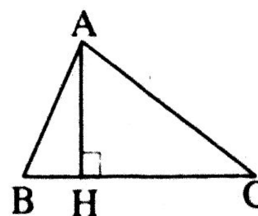
Nối AC, BC, ta nhận được ΔABC cần dựng.

<u>Chú ý:</u> 1. Khi xét độ dài ba đoạn thẳng có thoả mãn bất đẳng thức tam giác hay không, ta chỉ cần so sánh độ dài lớn nhất với tổng hai độ dài còn lại.

2. Kết quả trên có được nhờ vào một phương pháp khác để chứng minh bất đẳng thức tam giác, cụ thể:

Trong ΔABC, giả sử BC là cạnh lớn nhất suy ra góc $\hat{A}$ lớn nhất.

Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$), ta lần lượt có nhận xét:



- Trong ΔHAB vuông tại H, ta có:

  $BH < AB$. (1)

- Trong ΔHAC vuông tại H, ta có:

  $CH < AC$. (2)

Cộng theo vế (1) và (2), ta được:

$$BH + CH < AB + AC \Leftrightarrow BC < AB + AC.$$

Với giả sử BC là cạnh lớn nhất nên các bất đẳng thức còn lại là hiển nhiên.

2. HỆ QUẢ CỦA BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

Từ các bất đẳng thức tam giác, bằng phép chuyển vế ta suy ra

$AB > AC - BC$. $\quad AC > AB - BC$. $\quad BC > AC - AB$.

$AB > BC - AC$. $\quad AC > BC - AB$. $\quad BC > AB - AC$.

Như vậy, ta có kết quả:

Trong một tam giác, hiệu độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng nhỏ hơn độ dài cạnh còn lại.

Thí dụ 2: Dựa vào hệ quả của bất đẳng thức tam giác, kiểm tra xem bộ ba nào trong các bộ ba đoạn thẳng có độ dài cho sau đây là độ dài ba cạnh của tam giác và hãy dựng tam giác đó.

a. 1,2cm, 2,2cm, 1cm. b. 2cm, 3cm, 6cm. c. 10cm, 12cm, 5cm.

Giải

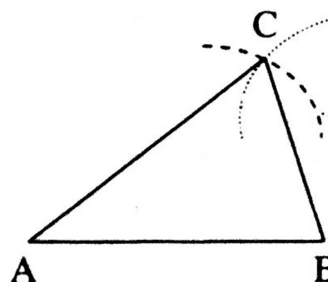
a. Đây không phải độ dài của ba cạnh tam giác bởi: $2,2 - 1,2 = 1$.

b. Đây không phải độ dài của ba cạnh tam giác bởi: $6 - 3 = 3 > 2$.

c. Đây chính là độ dài của ba cạnh tam giác bởi:

$$12 - 10 < 5, \quad 12 - 5 < 4, \quad 10 - 5 < 12.$$

Giả sử cần dựng ΔABC, biết AB = 10cm, AC = 12cm, BC = 5cm, ta lần lượt thực hiện:



- Dựng đoạn AB = 10cm.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB dựng các cung tròn tâm A bán kính 12cm và cung tròn tâm B bán kính 5cm. Hai cung này cắt nhau tại C.

Nối AC, BC, ta nhận được ΔABC cần dựng.

Chú ý: Khi xét độ dài ba đoạn thẳng có thoả mãn bất đẳng thức tam giác hay không, ta chỉ cần so sánh độ dài nhỏ nhất với hiệu hai độ dài còn lại.

Từ bất đẳng thức tam giác và hệ quả của bất đẳng thức tam giác, ta nhận thấy trong ΔABC luôn có: $|AC - BC| < AB < AC + BC$

$$|AB - AC| < BC < AB + AC$$

$$|AB - BC| < AC < AB + BC$$

Tức là, ta có kết quả đầy đủ hơn như sau:

Trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng độ dài của hai cạnh còn lại.

Thí dụ 3: Cho ΔABC có AB = 3cm, AC = 1cm.

a. Hãy tìm độ dài cạnh BC, biết độ dài này là một số nguyên (cm).

b. Dựng ΔABC.

Giải

a. Theo bất đẳng thức tam giác ta nhận được:

$$AB - AC < BC < AB + AC \Leftrightarrow 3 - 1 < BC < 3 + 1 \Leftrightarrow 2 < BC < 4$$

Do độ dài của BC là một số nguyên (cm) nên BC = 3cm.

b. *Học sinh tự làm.*

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tìm chu vi của tam giác cân biết độ dài hai cạnh của nó là 3,5cm và 7cm.

Giải

Giả sử ΔABC cân tại A thoả mãn điều kiện đầu bài, khi đó:

AB không thể bằng 3,5cm vì trái lại ta có: AB + AC = 7cm = BC

do đó: AB = AC = 7cm; BC = 3,5cm

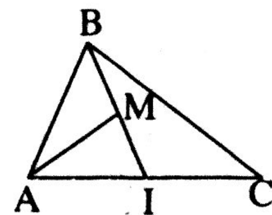
Khi đó, chu vi của tam giác được cho bởi:

$$CV = AB + AC + BC = 7 + 7 + 3,5 = 17,5\text{cm}.$$

Ví dụ 2: Cho ΔABC và M là một điểm nằm trong tam giác.

a. Gọi I là giao điểm của đường thẳng BM và cạnh AC. Chứng minh rằng MA + MB < IA + IB < CA + CB.

b. Chứng minh rằng MA + MB + MC lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của ΔABC.



Giải

a. Ta lần lượt xét:

- Trong ΔAMI, ta có: MA < IA + IM

  $\Leftrightarrow$ MA + MB < IA + IM + MB

  $\Leftrightarrow$ MA + MB < IA + IB. (1)

- Trong ΔBCI, ta có: IB < CI + CB $\Leftrightarrow$ IA + IB < IA + CI + CB

  $\Leftrightarrow$ IA + IB < CA + CB. (2)

Từ (1), (2), ta nhận được MA + MB < IA + IB < CA + CB, đpcm.

b. Ta lần lượt xét:

- Trong ΔMAB, ta có: MA + MB > AB. (3)
- Trong ΔMBC, ta có: MB + MC > BC. (4)
- Trong ΔMAC, ta có: MA + MC > AC. (5)

Cộng theo vế (3), (4), (5), ta được: $2(MA + MB + MC) > AB + BC + AC$

$$\Leftrightarrow MA + MB + MC > \frac{1}{2}(AB + BC + AC), \text{ đpcm.}$$

Mặt khác, dựa theo kết quả câu a), ta có:

$MA + MB < CA + CB.$ (6)

$MB + MC < AB + AC.$ (7)

$MA + MC < BA + BC.$ (8)

Cộng theo vế (6), (7), (8), ta được:

$$2(MA + MB + MC) < 2(AB + BC + AC)$$

$$\Leftrightarrow MA + MB + MC < AB + BC + AC, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 3: Cho ΔABC và M là điểm nằm giữa B và C.

a. Chứng minh rằng MA nhỏ hơn nửa chu vi ΔABC.

b. Trong trường hợp M là trung điểm của BC.

Chứng minh rằng: $MA < \frac{1}{2}(AB + AC)$.

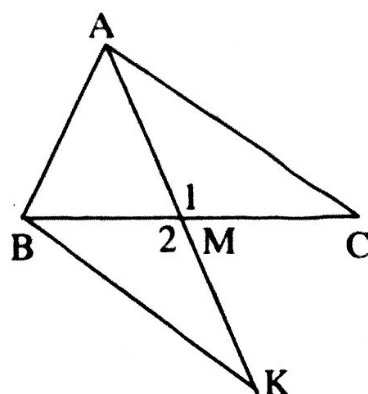
Giải

a. Ta lần lượt xét:

- Trong ΔMAB, ta có: $MA < AB + BM$. (1)
- Trong ΔMAC, ta có: $MA < AC + CM$. (2)

Cộng theo vế (1), (2), ta được: $2MA < AB + AC + BM + CM$

$$\Leftrightarrow MA < \frac{1}{2}(AB + AC + BC), \text{ đpcm.}$$



b. Trên tia AM lấy điểm K sao cho AM = KM.

Xét hai tam giác ΔAMC và ΔKMB, ta có:

$AM = KM$; $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$, vì đối đỉnh

$CM = BM$, vì M là trung điểm BC

do đó $\Delta AMC = \Delta KMB$ suy ra: $BK = AC$.

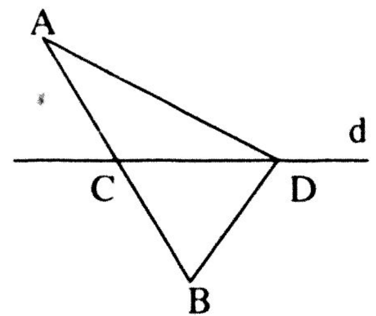
Trong ΔABK, ta có:

$$AK < AB + BK \Leftrightarrow 2MA < AB + AC \Leftrightarrow MA < \frac{1}{2}(AB + AC).$$

Chú ý quan trọng: Dựa vào bất đẳng thức tam giác chúng ta giải được một dạng bài toán cực trị "*Cho đường thẳng d và hai điểm A, B không thuộc d. Tìm trên đường thẳng d điểm C sao cho CA + CB nhỏ nhất*". Đây chính là dạng toán rất quen thuộc trong các kì thi đại học. Phương pháp được tổng kết thông qua hai ví dụ sau.

Ví dụ 4: Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm về hai phía của đường thẳng d. Tìm trên đường thẳng d điểm C sao cho CA + CB nhỏ nhất.

Giải



Gọi C là giao điểm của AB và d và D là điểm bất kì trên d ($D \neq C$). Ta cần đi chứng minh:

$$CA + CB < DA + DB.$$

Thật vậy, trong ΔABD, ta luôn có:

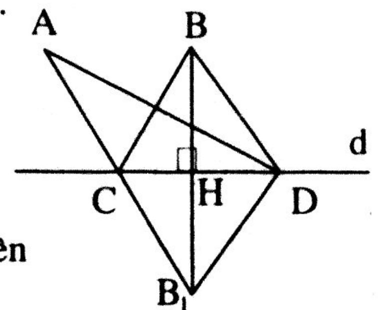
$$AB < DA + DB \Leftrightarrow CA + CB < DA + DB.$$

Vậy, điểm C cần tìm chính là giao điểm của AB và d.

Nhận xét: Ví dụ trên đã minh hoạ phương pháp tìm điểm C trong trường hợp hai điểm A, B khác phía với đường thẳng d. Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ phương pháp tìm điểm C trong trường hợp hai điểm A, B cùng phía với đường thẳng d.

Ví dụ 5: Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm về một phía của đường thẳng d. Tìm trên đường thẳng d điểm C sao cho CA + CB nhỏ nhất.

Giải



Kẻ BH vuông góc với d. Trên tia đối của tia HB lấy điểm B_1 sao cho $BH = B_1H$.

Gọi C là giao điểm của AB_1 và d và D là điểm bất kì trên d ($D \neq C$). Ta cần đi chứng minh: $CA + CB < DA + DB$.

Thật vậy, trong ΔAB_1D, ta luôn có:

$$AB_1 < DA + DB_1 \Leftrightarrow CA + CB_1 < DA + DB_1. \quad (1)$$

Nhận xét rằng:

- $\Delta HBC = \Delta HB_1C$ (hai cạnh góc vuông) $\Rightarrow CB = CB_1$. (2)
- $\Delta HBD = \Delta HB_1D$ (hai cạnh góc vuông) $\Rightarrow DB = DB_1$. (3)

Thay (2), (3) vào (1), ta được: CA + CB < DA + DB.

Vậy, điểm C cần tìm chính là giao điểm của AB_1 và d.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu và chứng minh bất đẳng thức tam giác.

Câu hỏi 2: Phát biểu hệ quả của bất đẳng thức tam giác.

Câu hỏi 3: Khi xét độ dài ba đoạn thẳng có thoả mãn bất đẳng thức tam giác hay không, ta chỉ cần thực hiện phép so sánh nào ?

Câu hỏi 4: Trình bày phương pháp giải bài toán cực trị " *Cho đường thẳng d và hai điểm A, B không thuộc d. Tìm trên đường thẳng d điểm C sao cho CA + CB nhỏ nhất* ".

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Dựa vào bất đẳng thức tam giác, kiểm tra xem bộ ba nào trong các bộ ba đoạn thẳng có độ dài cho sau đây là độ dài ba cạnh của tam giác và hãy dựng tam giác đó.

a. 3cm, 4cm, 8cm. b. 5cm, 8cm, 2cm. c. 6cm, 8cm, 9cm.

Bài tập 2. Tìm chu vi của tam giác cân ΔABC biết độ dài hai cạnh của nó là:

a. 4cm và 9cm. b. 4cm và 6cm.

Bài tập 3. Chứng minh rằng mỗi cạnh của tam giác bao giờ cũng nhỏ hơn nửa chu vi của tam giác ấy.

Bài tập 4. Cho ΔABC có AB = 1cm, AC = 6cm.

a. Hãy tìm độ dài cạnh BC, biết độ dài này là một số nguyên (cm).

b. Lấy điểm D nằm giữa B và C. Chứng minh rằng AD < 6,5cm.

Bài tập 5. Cho ΔABC có AB = 7cm, AC = 2cm.

a. Hãy tìm độ dài cạnh BC, biết độ dài này là một số nguyên lẻ (cm).

b. M là một điểm nằm trong tam giác. Chứng minh rằng :

$$MA + MB + MC > 8cm.$$

Bài tập 6. Cho ΔABC có AB < AC. Đường trung trực của BC cắt AC tại D. Gọi K là điểm bất kì khác D trên đường trung trực đó. So sánh chu vi các tam giác ΔKAB và ΔDAB.

Bài tập 7. Cho ΔABC có AB = c, AC = b (b > c), trung tuyến AM = m. Chứng minh rằng $\frac{1}{2}(b - c) < m < \frac{1}{2}(b + c)$.

Hướng dẫn: Sử dụng kết quả "*Đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của một tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy*" – Kết quả này đã được trình bày trong cuốn Toán 7 tập 1.

Bài tập 8. *

a. Cho hai tam giác ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ có $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ và $BC > B_1C_1$. Chứng minh rằng $\hat{A} > \hat{A}_1$.

b. Cho hai tam giác ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ có $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ và $\hat{A} > \hat{A}_1$. Chứng minh rằng $BC > B_1C_1$.

c. Áp dụng: Cho ΔABC có $AB < AC$, trung tuyến AM. Lấy điểm D bất kì trên tia đối của tia MA. So sánh độ dài CD và BD.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Bộ 3cm, 4cm, 8cm không là độ dài ba cạnh của tam giác, bởi: $3 + 4 = 7 < 8$.

b. Bộ 5cm, 8cm, 2cm không là độ dài ba cạnh của tam giác, bởi: $5 + 2 = 7 < 8$.

c. Bộ 6cm, 8cm, 9cm là độ dài ba cạnh của tam giác, bởi:

Cách 1: So sánh độ dài lớn nhất với tổng hai độ dài còn lại: $6 + 8 = 14 > 9$.

Cách 2: So sánh độ dài nhỏ nhất với hiệu hai độ dài còn lại: $9 - 8 = 1 < 6$.

Học sinh tự dựng hình.

Bài tập 2.

a. Giả sử ΔABC cân tại A thoả mãn điều kiện đầu bài, khi đó:

AB không thể bằng 4cm vì trái lại $AB + AC = 8cm < BC$

do đó: $AB = AC = 9cm$; $BC = 4cm$

Khi đó, chu vi của tam giác được cho bởi:

$C = AB + AC + BC = 9 + 9 + 4 = 22cm$.

b. Giả sử ΔABC cân tại A thoả mãn điều kiện đầu bài, khi đó có hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $AB = AC = 4cm$ và $BC = 6cm$

Chu vi của tam giác được cho bởi: $CV = AB + AC + BC = 4 + 4 + 6 = 14cm$.

Trường hợp 2: Nếu $AB = AC = 6cm$ và $BC = 4cm$

Chu vi của tam giác được cho bởi: $CV = AB + AC + BC = 6 + 6 + 4 = 16cm$.

Bài tập 3. Giả sử tam giác có ba cạnh là a, b, c, ta cần đi chứng minh:

$$a < \frac{1}{2}(a+b+c),\ b < \frac{1}{2}(a+b+c),\ c < \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Thật vậy, ta luôn có: $a < b + c \Leftrightarrow a + a < a + b + c \Leftrightarrow a < \frac{1}{2}(a+b+c)$, đpcm.

Các bất đẳng thức còn lại chứng minh tương tự.

Bài tập 4.

a. Theo bất đẳng thức tam giác ta nhận được: $AC - AB < BC < AC + AB$

$$\Leftrightarrow 6 - 1 < BC < 6 + 1 \Leftrightarrow 5 < BC < 7$$

Do độ dài của BC là một số nguyên (cm) nên BC = 6cm.

b. Dựa vào kết quả: $MA < \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$

$$\Leftrightarrow MA < \frac{1}{2}(1 + 6 + 6) \Leftrightarrow MA < 6{,}5\text{cm}.$$

Bài tập 5.

a. Theo bất đẳng thức tam giác ta nhận được:

$$AC - AB < BC < AC + AB \Leftrightarrow 7 - 2 < BC < 7 + 2 \Leftrightarrow 5 < BC < 9$$

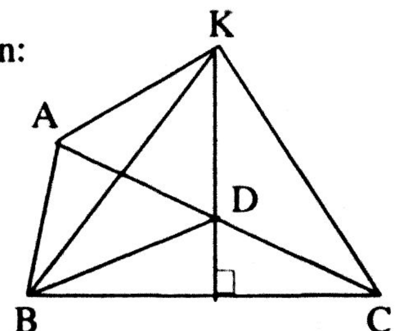
Do độ dài của BC là một số nguyên lẻ (cm) nên BC = 7cm.

b. Dựa vào kết quả: $MA + MB + MC > \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$

$$\Leftrightarrow MA + MB + MC > \frac{1}{2}(2 + 7 + 7) \Leftrightarrow MA + MB + MC > 8\text{cm}.$$

Bài tập 6. Trước hết, vì D, K thuộc trung trực của BC nên:

BD = CD và BK = CK.



Trong ΔACK, ta có: $AC < AK + CK$.

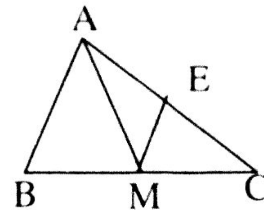
Khi đó: $CV_{\Delta DAB} = AB + AD + DB$

$= AB + AD + CD = AB + AC$

$< AB + AK + CK$

$= AB + AK + BK = CV_{\Delta KAB}$.

Bài tập 7. Gọi E là trung điểm AC, suy ra:



$$ME = \frac{1}{2}AB = \frac{c}{2}.$$

Xét ΔAEM, ta có: AE − ME < AM < AE + ME

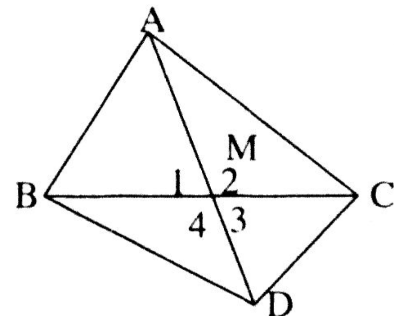
$$\Leftrightarrow \frac{b}{2} - \frac{c}{2} < m < \frac{b}{2} + \frac{c}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(b - c) < m < \frac{1}{2}(b + c).$$

Bài tập 8.

a. Tham khảo cuốn ***Các bài toán THCS chọn lọc*** – Lê Hồng Đức.

b. Tham khảo cuốn ***Các bài toán THCS chọn lọc*** – Lê Hồng Đức.

c. Ta lần lượt nhận thấy:



- Với hai tam giác ΔABM và ΔACM, ta có:

  MB = MC, vì M là trung điểm BC

  AM chung ; AB < AC

do đó: $\widehat{M_1} < \widehat{M_2} \Leftrightarrow \widehat{M_3} < \widehat{M_4}$

- Với hai tam giác ΔBDM và ΔCDM, ta có:

  MB = MC, vì M là trung điểm BC

  DM chung ; $\widehat{M_3} < \widehat{M_4}$, do đó CD < BD.

Chú ý: Vận dụng kết quả của định lí trong các câu a), b) các em học sinh hãy thực hiện thêm bài tập sau:

Cho ΔABC cân tại A. Gọi M là một điểm nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MBA} > \widehat{MCA}$. So sánh $\widehat{MAB}$ và $\widehat{MAC}$.



TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

Ta có định nghĩa:

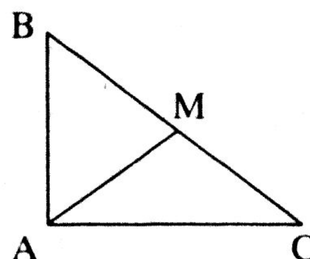
- *Đoạn thẳng AM nối đỉnh A của ΔABC với trung điểm M của cạnh BC gọi là đường trung tuyến (xuất phát từ đỉnh A hoặc ứng với cạnh BC) của ΔABC. Đôi khi, đường thẳng AM cũng gọi là đường trung tuyến của ΔABC.*
- *Mỗi tam giác có ba đường trung tuyến.*

Chú ý: Chúng ta đã có được các kết quả:

1. Trong tam giác vuông đường trung tuyến thuộc cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền.
2. Trong tam giác cân đường trung tuyến thuộc cạnh đáy thì cũng là đường cao, đường phân giác, đường trung trực.

Thí dụ 1: Cho ΔABC vuông tại A, có AB = 3cm, AC = 4cm. Tính độ dài đường trung tuyến AM.

Giải



Trong ΔABC vuông tại A, ta có:

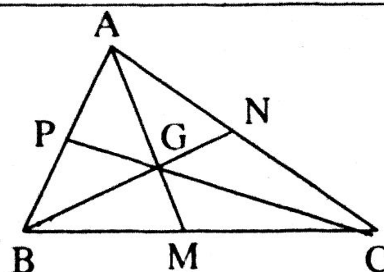
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Leftrightarrow BC = 5cm.$$

Khi đó: $AM = \frac{1}{2}BC = 2,5cm.$

2. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

Ta có kết quả sau:

Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.



Như vậy, trong ΔABC, các đường trung tuyến AM, BN, CP cùng đi qua điểm G (hay còn gọi là đồng quy tại điểm G, điểm G gọi là trọng tâm ΔABC) và ta có: $\frac{GA}{AM} = \frac{GB}{BN} = \frac{GC}{CP} = \frac{2}{3}$

Điểm G gọi là trọng tâm của ΔABC.

Nhận xét: 1. Từ kết quả trên ta suy ra được:

$$\frac{GA}{GM} = \frac{GB}{GN} = \frac{GC}{GP} = 2$$

$$\frac{GM}{AM} = \frac{GN}{BN} = \frac{GP}{CP} = \frac{1}{3}$$

2. Trọng tâm G của ΔABC luôn ở bên trong tam giác.

3. Để xác định trọng tâm G của ΔABC ta có thể sử dụng một trong hai cách:

   Cách 1: Kẻ hai trung tuyến, và khi đó giao điểm của chúng là trọng tâm G.

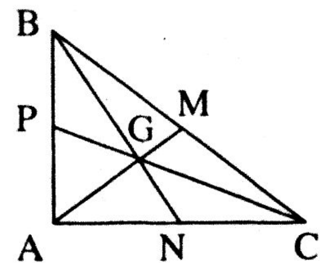
   Cách 2: Kẻ một trung tuyến (giả sử AM), trên đoạn AM lấy điểm G sao cho GA = 2GM (hoặc $GM = \frac{1}{2}GA$ hoặc $GM = \frac{1}{3}AM$ hoặc $GA = \frac{2}{3}AM$) và khi đó G là trọng tâm ΔABC.

4. Nếu G là trọng tâm ΔABC thì các tia AG, BG, CG sẽ là các đường trung tuyến, do đó chúng cắt cạnh đối diện tại trung điểm của mỗi cạnh.

Thí dụ 2: Cho ΔABC vuông tại A, có AB = 6cm, AC = 8cm. Tính khoảng cách từ trọng tâm G của ΔABC tới các đỉnh A, B, C.

Giải

Ta lần lượt có:



- Trong ΔABC vuông tại A, suy ra:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Leftrightarrow BC = 10cm.$$

Ta có: $GA = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}BC = \frac{1}{3}.10 = \frac{10}{3}$ cm.

- Trong ΔABN vuông tại A, suy ra:

$$BN^2 = AB^2 + AN^2 = 6^2 + 4^2 = 52 \Leftrightarrow BN = \sqrt{52}\text{ cm}.$$

Khi đó: $GB = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3}\sqrt{52} = \frac{2\sqrt{52}}{3}$ cm.

- Trong ΔACP vuông tại A, suy ra:

$$CP^2 = AC^2 + AP^2 = 8^2 + 3^2 = 73 \Leftrightarrow CP = \sqrt{73}\text{ cm.}$$

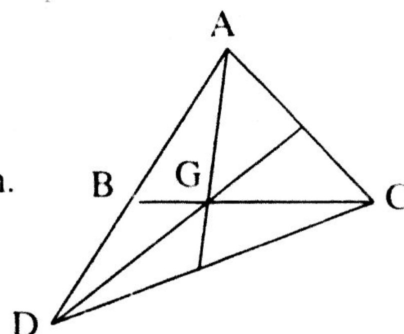
Khi đó: $GC = \frac{2}{3}CP = \frac{2}{3}\sqrt{73} = \frac{2\sqrt{73}}{3}$ cm.

Thí dụ 3: Cho ΔABC. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho BD = BA. Trên cạnh BC lấy điểm G sao cho $BG = \frac{1}{3}BC$.

a. Chứng minh rằng G là trọng tâm ΔACD.

b. Chứng tỏ rằng AG, DG theo thứ tự cắt các cạnh CD, AC tại trung điểm của chúng.

Giải



a. Trong ΔACD, ta có nhận xét rằng:

- Vì B là trung điểm của AD nên CB là trung tuyến.
- Vì điểm G thuộc BC thoả mãn $BG = \frac{1}{3}BC$ nên G là trọng tâm ΔACD.

b. Vì G là trọng tâm ΔACD nên:

- AG là đường trung tuyến, do đó AG cắt CD tại trung điểm của CD.
- DG là đường trung tuyến, do đó DG cắt AC tại trung điểm của AC.

Chú ý: Chúng ta có các kết quả:

1. Trong một tam giác cân, hai đường trung tuyến ứng với hai cạnh bên thì bằng nhau.
2. Trong một tam giác đều cạnh bằng a, độ dài ba đường trung tuyến bằng nhau và bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Các kết quả trên sẽ được chứng minh trong phần các ví dụ minh hoạ.

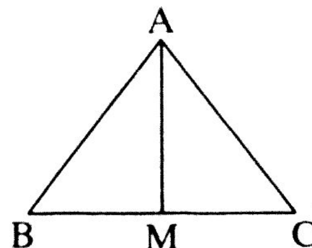
II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC cân tại A có AB = AC = 5cm, BC = 8cm. Kẻ trung tuyến AM.

a. Chứng minh rằng AM ⊥ BC. b. Tính độ dài trung tuyến AM.

Giải

a. Xét hai tam giác ΔMAB và ΔMAC, ta có:



AB = AC, vì ΔABC cân tại A

MB = MC, vì M là trung điểm BC

AM chung

do đó ΔMAB = ΔMAC, suy ra: $\widehat{AMB} = \widehat{AMC}$

Mặt khác, ta lại có: $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^0 \Leftrightarrow 2\widehat{AMB} = 180^0 \Leftrightarrow \widehat{AMB} = 90^0$

$\Leftrightarrow AM \perp BC$, đpcm.

b. Trong ΔMAB vuông tại M, ta có:

$BM = \frac{1}{2}BC = 4cm$, vì M là trung điểm BC

$AM^2 = AB^2 - BM^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \Leftrightarrow AM = 3cm.$

Vậy, ta được AM = 3cm.

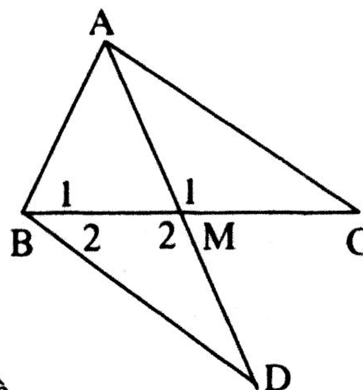
Ví dụ 2: Cho ΔABC, trung tuyến AM. Trên tia đối của tia AM lấy điểm D sao cho MA = MD.

a. Chứng minh rằng BD = AC.

b. Nêu cách dựng ΔABC khi biết độ dài AB, AC và trung tuyến AM của nó.

Giải

a. Xét hai tam giác ΔAMC và ΔDMB, ta có:



AM = DM

$\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$, vì đối đỉnh

CM = BM, vì M là trung điểm BC

do đó ΔAMC = ΔDMB suy ra:AC = BD.

b. Như vậy, để dựng ΔABC khi biết độ dài AB, AC và trung tuyến AM ta thực hiện như sau:

- Dựng ΔABD khi biết độ dài ba cạnh, với: AB, BD = AC, AD = 2AM.
- Lấy M là trung điểm AD. Trên tia đối của tia MB lấy điểm C sao cho BM = CM.

Nối A, B, C ta được ΔABC cần dựng.

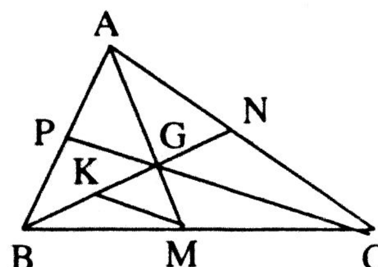
Ví dụ 3: Cho ΔABC các trung tuyến AM, BN, CP, trọng tâm G. Gọi K là trung điểm của GB.

b. Chứng minh rằng các cạnh của ΔGMK bằng $\frac{1}{3}$ các trung tuyến của ΔABC.

c. Nêu cách dựng ΔABC khi biết độ dài ba trung tuyến AM, BN, CP của nó.

Giải

a. Với các cạnh của ΔGMK, ta lần lượt có:



$GM = \frac{1}{3}AM$, theo tính chất.

$GK = \frac{1}{2}GB = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}BN = \frac{1}{3}BN.$

$KM = \frac{1}{2}GC = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}CP = \frac{1}{3}CP.$

Vậy, các cạnh của ΔGMK bằng $\frac{1}{3}$ các trung tuyến của ΔABC.

b. Như vậy, để dựng ΔABC khi biết độ dài ba trung tuyến AM, BN, CP ta thực hiện như sau:

- Dựng ΔGKM khi biết độ dài ba cạnh, với:

  $GM = \frac{1}{3}AM, GK = \frac{1}{3}BN, KM = \frac{1}{3}CP.$

- Trên tia đối của tia GM lấy điểm A sao cho AG = 2GM.
- Trên tia đối của tia KG lấy điểm B sao cho BK = GK.
- Trên tia đối của tia MB lấy điểm C sao cho CM = BM.

Nối A, B, C ta được ΔABC cần dựng.

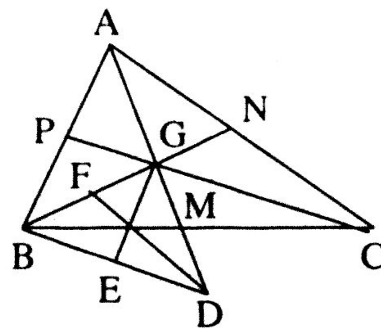
Ví dụ 4: Cho ΔABC các trung tuyến AM, BN, CP, trọng tâm G. Trên tia AM lấy điểm D sao cho G là trung điểm của AD.

a. Chứng minh rằng các cạnh của ΔBGD bằng $\frac{2}{3}$ các trung tuyến của ΔABC.

b. Chứng minh rằng các đường trung tuyến của ΔBGD bằng $\frac{1}{3}$ các cạnh của ΔABC.

c. Nêu cách dựng ΔABC khi biết độ dài ba trung tuyến AM, BN, CP của nó.

Giải



a. Với các cạnh của ΔBGD, ta lần lượt có:

$GD = GA = \frac{2}{3}AM$, theo tính chất.

$GB = \frac{2}{3}BN$, theo tính chất.

$BD = GC$, vì $\Delta MBD = \Delta MCG$ (c.g.c) $\Rightarrow BD = \frac{2}{3}CP$.

Vậy, các cạnh của ΔBGD bằng $\frac{2}{3}$ các trung tuyến của ΔABC.

b. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của BD, BG, suy ra BM, GE, DF là các đường trung tuyến của ΔBGD.

Ta có: $BM = \frac{1}{2}BC$, vì M là trung điểm BC.

$GE = \frac{1}{2}AB$, vì G, E theo thứ tự là trung điểm của AD, BD.

$DF = AN$, vì $\Delta DFG = \Delta ANG$ (c.g.c) $\Rightarrow DF = \frac{1}{2}AC$.

Vậy, các đường trung tuyến của ΔBGD bằng $\frac{1}{2}$ các cạnh của ΔABC.

c. Như vậy, để dựng ΔABC khi biết độ dài ba trung tuyến AM, BN, CP ta thực hiện như sau:

- Dựng ΔGBD khi biết độ dài ba cạnh, với:

  $GD = \frac{2}{3}AM$, $GB = \frac{2}{3}BN$, $BD = \frac{2}{3}CP$.

- Trên tia đối của tia GD lấy điểm A sao cho $AG = GD$.
- Lấy M là trung điểm GD. Trên tia đối của tia MB lấy điểm C sao cho $BM = CM$.

Nối A, B, C ta được ΔABC cần dựng.

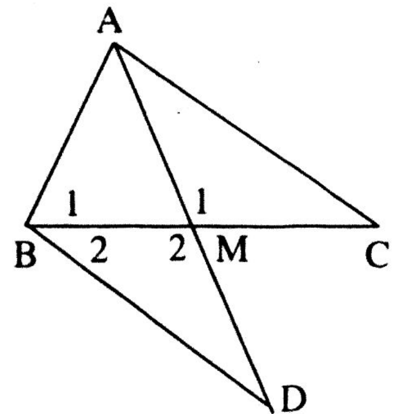
<u>**Ví dụ 5:**</u> Cho ΔABC vuông tại A, trung tuyến AM. Trên tia đối của tia AM lấy điểm D sao cho $MA = MD$.

a. Chứng minh rằng ΔABD vuông.

b. Chứng minh rằng $\Delta ABC = \Delta ABD$.

c. So sánh AM và BC.

Giải



a. Xét hai tam giác ΔAMC và ΔDMB, ta có: $AM = DM$

$\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$, vì đối đỉnh

$CM = BM$, vì M là trung điểm BC

do đó $\Delta AMC = \Delta DMB$ suy ra: $\hat{C} = \hat{B}_1$ và $AC = BD$.

Khi đó: $A\hat{B}D = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{B}_1 + \hat{C} = 90^0$

$\Leftrightarrow \Delta ABD$ vuông tại B.

b. Xét hai tam giác vuông ΔABC và ΔABD, ta có:

AB chung

$AC = BD$, chứng minh trên

do đó $\Delta ABC = \Delta ABD$ (hai cạnh góc vuông), đpcm.

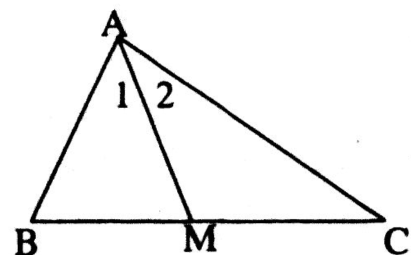
c. Từ kết quả câu b), suy ra: $BC = AD = 2AM \Leftrightarrow AM = \frac{1}{2}BC$.

Nhận xét:

1. Ví dụ trên cho chúng ta thêm một phương pháp chứng minh rằng "*Trong tam giác vuông trung tuyến thuộc cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền*".
2. Tất nhiên, điều ngược lại cũng đúng, tức là "Một tam giác có trung tuyến bằng nửa cạnh tương ứng thì tam giác đó là tam giác vuông". Ví dụ sau sẽ giúp chúng ta chứng minh nhận định này.

Ví dụ 6: Cho ΔABC, trung tuyến AM bằng nửa cạnh BC. Chứng minh rằng ΔABC vuông tại A.

Giải



Từ giả thiết, ta nhận được: $AM = BM = CM$

suy ra:

- ΔABM cân tại M $\Leftrightarrow \hat{B} = \hat{A}_1$.
- ΔACM cân tại M $\Leftrightarrow \hat{C} = \hat{A}_2$.

Trong ΔABC, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^0 \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{A} = 180^0$$

$$\Leftrightarrow 2\hat{A} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^0 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại A.}$$

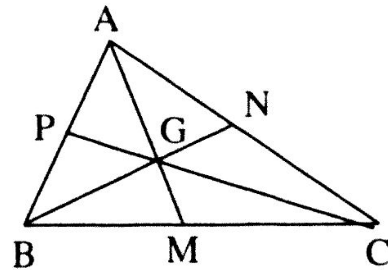
Ví dụ 7: Cho ΔABC có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, các trung tuyến AM, BN, CP. Chứng minh rằng:

a. $BN + CP > \frac{3a}{2}$.

b. $\frac{1}{2}(b - c) < AM < \frac{1}{2}(b + c)$.

c. $\frac{3}{4}(a + b + c) < AM + BN + CP < a + b + c$.

Giải



a. Gọi G là trọng tâm ΔABC.

Trong ΔGBC, ta có:

$$GB + GC > BC \Leftrightarrow \frac{2}{3}BN + \frac{2}{3}CP > a$$

$$\Leftrightarrow BN + CP > \frac{3a}{2}, \text{ đpcm.} \qquad (1)$$

b. Vì M, N theo thứ tự là trung điểm BC, AC nên: $MN = \frac{1}{2}AB = \frac{c}{2}$.

Xét ΔAMN, ta có: $AN - MN < AM < AN + MN$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{2} - \frac{c}{2} < AM < \frac{b}{2} + \frac{c}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(b - c) < AM < \frac{1}{2}(b + c). \qquad (2)$$

c. Ta lần lượt sử dụng:

- Phương pháp chứng minh như trong câu a), ta cũng có:

$$AM + CP > \frac{3b}{2}. \qquad (3)$$

$$AM + BN > \frac{3c}{2}. \qquad (4)$$

Cộng theo vế (1), (3), (4), ta được :

$$2(AM + BN + CP) > \frac{3}{2}(a + b + c)$$

$$\Leftrightarrow AM + BN + CP > \frac{3}{4}(a + b + c), \text{ đpcm.}$$

- Phương pháp chứng minh như trong câu b), ta cũng có:

$$BN < \frac{1}{2}(a + c). \qquad (5)$$

$CP < \frac{1}{2}(a + b).$ (6)

Cộng theo vế (2), (5), (6), ta được : $AM + BN + CP < \frac{1}{2}(2a + 2b + 2c)$

$\Leftrightarrow AM + BN + CP < a + b + c$, đpcm.

Ví dụ 8: Chứng minh rằng:

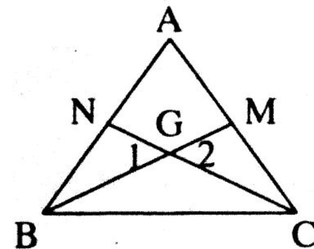
a. Trong một tam giác cân, hai đường trung tuyến ứng với hai cạnh bên thì bằng nhau.

b. Nếu tam giác có hai đường trung tuyến bằng nhau thì tam giác đó cân.

Giải

a. Giả sử ΔABC cân tại A, ta cần đi chứng minh hai trung tuyến BM = CN.

Thật vậy, xét hai tam giác ΔABM và ΔCAN, ta có:



AB = AC, vì ΔABC cân tại A

$\widehat{A}$ chung

$AM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AB = AN$

do đó: $\Delta ABM = \Delta CAN$ (c.g.c) $\Rightarrow$ BM = CN, đpcm.

b. Giả sử ΔABC có hai trung tuyến BM = CN ta cần đi chứng minh ΔABC cân tại A.

Thật vậy, xét hai tam giác ΔBGN và ΔCGM, ta có:

$GB = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}CN = GC.$

$\widehat{G}_1 = \widehat{G}_2$, vì đối đỉnh

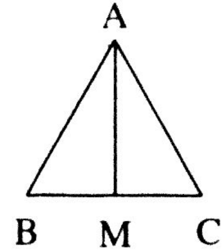
$GN = \frac{1}{3}CN = \frac{1}{3}BM = GM.$

do đó $\Delta BGN = \Delta CGM$ (c.g.c), suy ra: $BN = CM \Leftrightarrow 2BN = 2CM \Leftrightarrow AB = AC$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại A, đpcm.

Ví dụ 9: Chứng minh rằng "*Trong một tam giác đều cạnh bằng a, độ dài ba đường trung tuyến bằng nhau và bằng* $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ".

Giải



Giả sử ΔABC đều có các trung tuyến AM, BN, CP, khi đó:

- Vì ΔABC cân tại A nên BN = CP và AM ⊥ BC.
- Vì ΔABC cân tại B nên AM = CP.

Suy ra AM = BN = CP.

Trong ΔMAB vuông tại M, ta có: $BM = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$, vì ΔABC đều

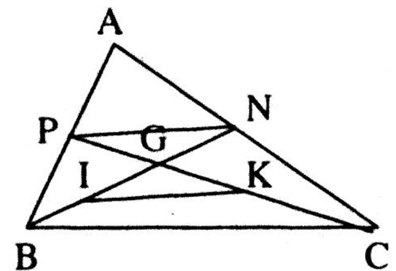
$$AM^2 = AB^2 - BM^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy, với ΔABC đều cạnh bằng a ta có $AM = BN = CP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chú ý: Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ phương pháp chứng minh tính chất ba đường trung tuyến của tam giác dựa vào kết quả "*Đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của một tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy*".

Ví dụ 10: Cho ΔABC, hai trung tuyến BN và CP cắt nhau tại G. Chứng minh rằng $\frac{GB}{BN} = \frac{GC}{CP} = \frac{2}{3}$

Giải



Ta lần lượt có nhận xét:

- Vì P, N theo thứ tự là trung điểm AB, AC nên:

$$PN \overset{//}{=} \frac{1}{2}BC.$$

- Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm GB, GC nên: $IK \overset{//}{=} \frac{1}{2}BC$.

Từ đó ta thấy ΔGIK = ΔGNP (g.c.g), suy ra:

$$GN = GI = \frac{1}{2}BG \Leftrightarrow GB = \frac{2}{3}BN \Leftrightarrow \frac{GB}{BN} = \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$GP = GK = \frac{1}{2}CG \Leftrightarrow GC = \frac{2}{3}CP \Leftrightarrow \frac{GC}{CP} = \frac{2}{3}. \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $\frac{GB}{BN} = \frac{GC}{CP} = \frac{2}{3}$, đpcm.

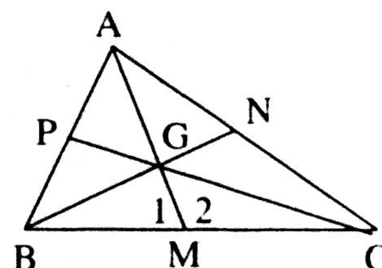
Yêu cầu:
1. Các em học sinh hãy giải thích tại sao từ kết quả trên chúng ta nhận được tính chất của ba đường trung tuyến trong tam giác.
2. Thực hiện bài toán "*Cho ΔABC, các đường trung tuyến AM, BN, CP, trọng tâm G. Chứng minh rằng G là trọng tâm ΔMNP*"

Ví dụ 11: * Chứng minh rằng trong một tam giác, trung tuyến ứng với cạnh lớn thì nhỏ hơn trung tuyến ứng với cạnh nhỏ.

Giải

Xét ΔABC các đường trung tuyến AM, BN, CP, trọng tâm G. Giả sử $AB < AC$ ta cần đi chứng minh $CP > BN$.

Thật vậy:



- Với hai tam giác ΔABM và ΔACM, ta có:

  $MB = MC$, vì M là trung điểm BC

  AM chung

  $AB < AC$

  do đó $\widehat{M_1} < \widehat{M_2}$

- Với hai tam giác ΔGBM và ΔGCM, ta có:

  $MB = MC$, vì M là trung điểm BC

  GM chung

  $\widehat{M_1} < \widehat{M_2}$

do đó: $GB < GC \Leftrightarrow \frac{2}{3}GB < \frac{2}{3}GC \Leftrightarrow BN < CP$, đpcm.

Nhận xét: Ví dụ trên đã nêu ra một tính chất khác của ba đường trung tuyến của tam giác.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa đường trung tuyến của tam giác. Tại sao mỗi tam giác chỉ có đúng ba đường trung tuyến ?

Câu hỏi 2: Trong tam giác vuông đường trung tuyến thuộc cạnh huyền có tính chất gì ? Chứng minh ?

Câu hỏi 3: Trong tam giác cân đường trung tuyến thuộc cạnh đáy có tính chất gì ? Chứng minh ?

Câu hỏi 4: Phát biểu tính chất của ba đường trung tuyến trong một tam giác.

Câu hỏi 5: Chứng minh rằng trong một tam giác cân, hai đường trung tuyến ứng với hai cạnh bên thì bằng nhau.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho ΔABC cân tại A có AB = AC = 10cm, BC = 12cm. Kẻ trung tuyến AM.

a. Chứng minh rằng $AM \perp BC$.

b. Tính độ dài trung tuyến AM.

Bài tập 2. Cho ΔABC vuông tại A, có AB = 12cm, AC = 16cm và trọng tâm G. Tính tổng GA + GB + GC.

Bài tập 3. Cho ΔABC có AB = 9cm, AC = 12cm, BC = 15cm và trọng tâm G.

a. Chứng minh rằng ΔABC vuông.

b. Tính tổng GA + GB + GC.

Bài tập 4. Cho ΔABC có AB = 8cm, AC = 10cm, BC = 14cm, các đường trung tuyến AM, BN, CP. Chứng minh rằng:

a. BN + CP > 21cm.

b. AM + BN + CP > 24cm.

Bài tập 5. Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

a. Nếu đường cao AH đồng thời là đường trung tuyến thì ΔABC cân tại A.

b. Nếu ΔABC cân tại A thì đường trung tuyến AH cũng đồng thời là đường cao.

Bài tập 6. Cho ΔABC đều cạnh a. Chứng minh rằng: $GA = GB = GC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài tập 7. Cho ΔABC. Gọi D, E theo thứ tự là trung điểm của BC, AB. Trên tia đối của tia BA lấy điểm K sao cho BK = BE. Trên tia đối của tia CB lấy điểm H sao cho CH = CD. Chứng minh rằng:

a. ME = MH.

b. Ba điểm K, D, M thẳng hàng.

Bài tập 8. Cho ΔABC, các đường trung tuyến AM, BN, CP, trọng tâm G.

a. Chứng minh rằng G là trọng tâm ΔMNP.

b. Gọi I là giao điểm của NP với AM. So sánh độ dài AI và IG.

Bài tập 9. * Chứng minh rằng mỗi trung tuyến của tam giác nhỏ hơn tổng hai trung tuyến còn lại.

Bài tập 10. Dựng ΔABC khi biết:

a. AB = 3cm, AC = 4cm và trung tuyến AM = 2,5cm.

b. AB = 5cm, AC = 5cm và trung tuyến AM = 4cm.

c. AB = 6cm, AC = 8cm và trung tuyến AM = 6cm.

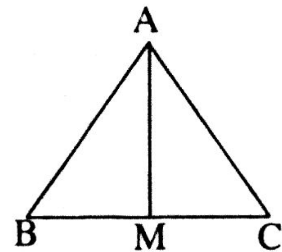
Bài tập 11. Dựng ΔABC, biết độ dài ba đường trung tuyến của nó bằng:

a. 6cm, 6cm, 9cm.

b. 3cm, 4cm, 5cm.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.



a. *Học sinh tự làm.*

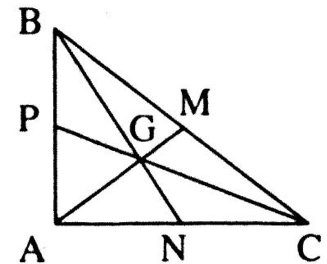
b. Trong ΔMAB vuông tại M, ta có:

$BM = \frac{1}{2}BC = 6cm$, vì M là trung điểm BC

$AM^2 = AB^2 - BM^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \Leftrightarrow AM = 8cm.$

Vậy, ta được AM = 8cm.

Bài tập 2. Ta lần lượt có:



- Trong ΔABC vuông tại A, suy ra:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 12^2 + 16^2 = 400 \Leftrightarrow BC = 20cm.$

Ta có: $GA = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}BC = \frac{1}{3}.20 = \frac{20}{3}$ cm.

- Trong ΔABN vuông tại A, suy ra:

$BN^2 = AB^2 + AN^2 = 12^2 + 8^2 = 208 \Leftrightarrow BN = \sqrt{208}$ cm.

Khi đó: $GB = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3}\sqrt{208} = \frac{2\sqrt{208}}{3}$ cm.

- Trong ΔACP vuông tại A, suy ra:

$CP^2 = AC^2 + AP^2 = 16^2 + 6^2 = 292 \Leftrightarrow CP = \sqrt{292}$ cm.

Khi đó: $GC = \frac{2}{3}CP = \frac{2}{3}\sqrt{292} = \frac{2\sqrt{292}}{3}$ cm.

Suy ra: $GA + GB + GC = \frac{20}{3} + \frac{2\sqrt{208}}{3} + \frac{2\sqrt{292}}{3} = \frac{2}{3}(10 + \sqrt{208} + \sqrt{292}).$

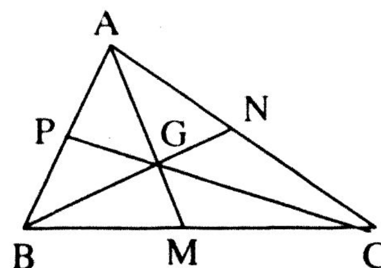
Bài tập 3.

a. Trong ΔABC, nhận xét rằng:

$$AB^2 + AC^2 = 9^2 + 12^2 = 225 = 15^2 = BC \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại A.}$$

b. *Học sinh tự làm* – Tương tự bài tập 2.

Bài tập 4.



a. Gọi G là trọng tâm ΔABC.

Trong ΔGBC, ta có:

$$GB + GC > BC \Leftrightarrow \frac{2}{3}BN + \frac{2}{3}CP > BC$$

$$\Leftrightarrow BN + CP > \frac{3BC}{2} = 21cm, \text{ đpcm.} \qquad (1)$$

b. Sử dụng cách chứng minh như trong câu a), ta cũng có:

$$AM + CP > \frac{3AC}{2} = 15. \qquad (2)$$

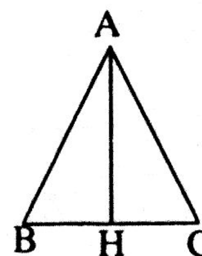
$$AM + BN > \frac{3AB}{2} = 12. \qquad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3), ta được : $2(AM + BN + CP) > 21 + 15 + 12$

$$\Leftrightarrow AM + BN + CP > 24, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 5.

a. Trong ΔABC, ta có:



- Vì AH là đường cao nên: $\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^0$
- Vì AH là trung tuyến nên: HB = HC.

Xét hai tam giác ΔAHB và ΔAHC, ta có: HB = HC

$\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^0$

AH chung

suy ra: $\Delta AHB = \Delta AHC$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = AC \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

b. Ta có nhận xét:

- Vì ΔABC cân tại A nên: AB = AC và $\hat{B} = \hat{C}$
- Vì AH là trung tuyến nên: HB = HC.

Xét hai tam giác ΔAHB và ΔAHC,

ta có: $AB = AC$

$\widehat{B} = \widehat{C}$

$HB = HC$

suy ra: $\Delta AHB = \Delta AHC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$

Mặt khác: $\widehat{H}_1 + \widehat{H}_2 = 180^0 \Leftrightarrow 2\widehat{H}_1 = 180^0 \Leftrightarrow \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = 90^0$

$\Leftrightarrow$ AH là đường cao.

Bài tập 6. Giả sử ΔABC có các trung tuyến AM, BN, CP, khi đó:

$$AM = BN = CP = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow GA = GB = GC = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Bài tập 7. *Hướng dẫn* (Học sinh tự vẽ hình)

a. Nhận xét rằng:

- Vì D, E theo thứ tự là trung điểm của BC, AB nên DE // AC.
- Vì CM // DE và C là trung điểm DH nên M là trung điểm của EH.

b. Trong ΔKEH, ta có:

- KM là một trung tuyến
- D là trọng tâm

do đó K, D, M thẳng hàng.

Bài tập 8. *Học sinh tự làm.*

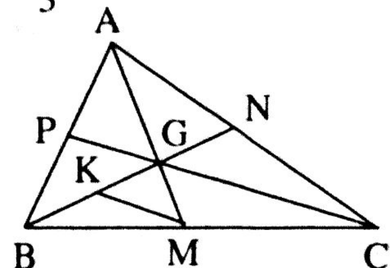
Bài tập 9. Gọi K là trung điểm của GB.

Xét ΔGMK:

- Với các cạnh của ΔGMK, ta lần lượt có: $GM = \frac{1}{3}AM$, theo tính chất.

$$GK = \frac{1}{2}GB = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}BN = \frac{1}{3}BN.$$

$$KM = \frac{1}{2}GC = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}CP = \frac{1}{3}CP.$$



- Sử dụng bất đẳng thức tam giác, ta có:

$$GM < GK + KM \Leftrightarrow 3GM < 3GK + 3KM \Leftrightarrow AM < BN + CP.$$

Các bất đẳng thức còn lại chứng minh tương tự.

Bài tập 10. *Học sinh tự vẽ hình theo cách dựng.*

a. Ta thực hiện như sau:

- Dựng ΔABD khi biết độ dài ba cạnh, với: AB = 3cm, BD = 4cm, AD = 5cm
- Lấy M là trung điểm AD. Trên tia đối của tia MB lấy điểm C sao cho BM = CM.

Nối A, B, C ta được ΔABC cần dựng.

b. *Học sinh tự làm.*

c. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 11. Giả sử ΔABC có các đường trung tuyến, trọng tâm G. Gọi K là trung điểm của GB.

a. Với AM = BN = 6cm, CP = 9cm .Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng ΔGKM khi biết độ dài ba cạnh, với:

$$GM = \frac{1}{3}AM = 2cm, GK = \frac{1}{3}BN = 2cm, KM = \frac{1}{3}CP = 3cm.$$

- Trên tia đối của tia GM lấy điểm A sao cho AG = 2GM.
- Trên tia đối của tia KG lấy điểm B sao cho BK = GK.
- Trên tia đối của tia MB lấy điểm C sao cho CM = BM.

Nối A, B, C ta được ΔABC cần dựng.

Cách 2: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng ΔGBD khi biết độ dài ba cạnh, với:

$$GD = \frac{2}{3}AM = 4cm, GB = \frac{2}{3}BN = 4cm, BD = \frac{2}{3}CP = 6cm.$$

- Trên tia đối của tia GD lấy điểm A sao cho AG = GD.
- Lấy M là trung điểm GD. Trên tia đối của tia MB lấy điểm C sao cho BM = CM. Nối A, B, C ta được ΔABC cần dựng.

b. *Học sinh tự làm tương tự.*



TÍNH CHẤT TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH LÍ VỀ TÍNH CHẤT CÁC ĐIỂM THUỘC TIA PHÂN GIÁC

Chúng ta mới chỉ biết rằng "*Tia phân giác của một góc thì chia góc đó thành hai góc bằng nhau* " mà chưa được làm quen với tính chất điểm của tia phân giác. Để tiện cho việc bắt đầu chúng ta thực hiện thí dụ sau:

Thí dụ 1: Cho góc xOy khác góc bẹt. Trên tia phân giác Ot của góc xOy lấy điểm M bất kì. Chứng minh rằng điểm M cách đều Ox và Oy.

Giải

Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của M lên Ox và Oy. Ta cần đi chứng minh MH = MK.

Thật vậy, xét hai tam giác vuông ΔOMH và ΔOMK, có:

OM chung

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, vì Ot là phân giác

do đó:

ΔOMH = ΔOMK (cạnh huyền – góc nhọn) ⇒ MH = MK, đpcm.

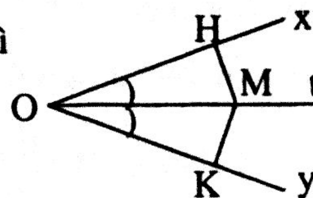
Như vậy, ta có kết quả (được gọi là *định lí thuận*) như sau:

Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.

Như vậy, với góc xOy có tia phân giác Ot thì

M∈ Ot ⇒ kc(M, Ox) = kc(M, Oy)

⇒ MH = MK.



Nhận xét: Từ kết quả của định lí trên gợi ý cho chúng ta giải bài toán " *Tìm điểm M thuộc hình (H) cách đều hai cạnh của một góc xÔy cho trước* ", bởi khi đó M chính là giao điểm của (H) với tia phân giác của góc xÔy.

Thí dụ 2: Cho ΔABC nhọn. Tìm điểm D thuộc trung tuyến AM sao cho D cách đều hai cạnh của góc B.

Giải

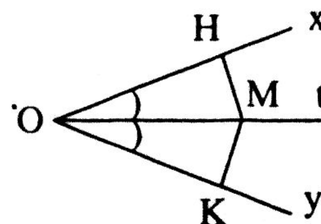
Ta thấy ngay, điểm D phải tìm là giao điểm của trung tuyến AM với tia phân giác góc B.

Nhận xét: Tới đây, một câu hỏi thường được các em học sinh đặt ra là "*Điều ngược lại của định lí trên có đúng không?*". Tức là "*Một điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì có nằm trên tia phân giác của góc đó không ?*", để trả lời câu hỏi này chúng ta xem xét tiếp thí dụ sau.

Thí dụ 3: Cho điểm M nằm bên trong góc $\widehat{xOy}$ và cách đều hai cạnh của góc này. So sánh số đo của hai góc $\widehat{MOx}$ và $\widehat{MOy}$.

Giải

Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của M lên Ox và Oy. Theo giả thiết ta có MH = MK.



Xét hai tam giác vuông ΔOMH và ΔOMK, ta có:

OM chung

MH = MK

do đó:

ΔOMH = ΔOMK (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{MOH} = \widehat{MOK} \Leftrightarrow \widehat{MOx} = \widehat{MOy}$

⇒ M thuộc tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

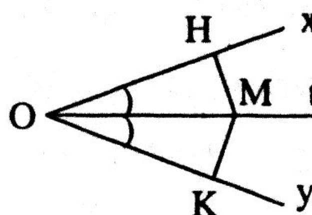
Như vậy, ta có kết quả (được gọi là *định lí đảo*) như sau:

Điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.

Như vậy, với góc xOy và điểm M sao cho

kc(M, Ox) = kc(M, Oy) $\Rightarrow \widehat{MOx} = \widehat{MOy}$

⇒ OM là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.



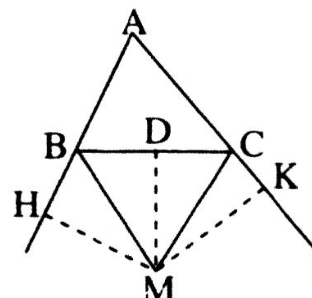
Từ hai định lí trên ta có:

Tập hợp các điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc là tia phân giác của góc đó.

Thí dụ 4: Cho ΔABC. Chứng minh rằng hai đường phân giác của hai góc ngoài tại B và C và phân giác trong của góc $\widehat{A}$ cùng đi qua một điểm.

Giải

Gọi M là giao điểm của hai đường phân giác của hai góc ngoài tại B và C. Ta cần đi chứng minh M thuộc tia phân giác của góc $\widehat{A}$.



Thật vậy, kẻ $MH \perp AB$, $MD \perp BC$, $MK \perp AC$, suy ra:

MH = MD, vì M thuộc tia phân giác góc ngoài tại B.

MK = MD, vì M thuộc tia phân giác góc ngoài tại C.

suy ra:

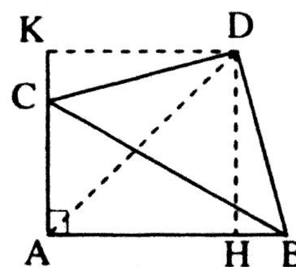
$MH = MK \Leftrightarrow$ M thuộc là tia phân giác của góc $\widehat{A}$.

Nhận xét: Như vậy, để thực hiện thí dụ trên chúng đã sử dụng cả định lí thuận và định lí đảo.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC vuông tại A. Vẽ ΔDBC vuông cân tại D ở phía ngoài ΔABC. Chứng minh rằng AD là tia phân giác của góc A.

Giải



Kẻ $DH \perp AB$, $DK \perp AC$.

Xét hai tam giác vuông ΔDHB và ΔDKC, ta có:

DB = DC, vì ΔDBC cân tại D

$\widehat{HDB} = \widehat{KDC}$, chúng là hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc

do đó $\Delta DHB = \Delta DKC$ (cạnh huyền – góc nhọn), suy ra:

$DH = DK \Leftrightarrow$ AD là tia phân giác của góc A.

Nhận xét: Như vậy, để chứng minh tia Ot là phân giác của góc xOy chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Chứng minh $\widehat{tOx} = \widehat{tOy}$.

Cách 2: Lấy điểm M trên Ot, kẻ $MH \perp Ox$, $MK \perp Oy$. Ta đi chứng minh MH = MK.

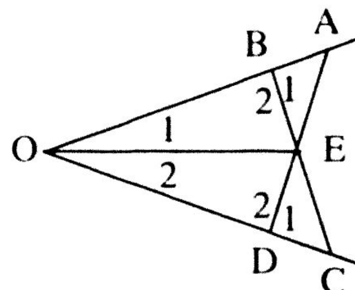
Ví dụ 2: Cho góc $x\hat{O}y$. Lấy các điểm A, B thuộc Ox sao cho OA > OB. Lấy các điểm C, D thuộc Oy sao cho OC = OA và OD = OB. Gọi E là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng:

a. AD = BC.

b. $\Delta ABE = \Delta CDE$.

c. OE là tia phân giác của góc $x\hat{O}y$.

Giải



a. Xét hai tam giác ΔOAD và ΔOCB, ta có:

OA = OC, giả thiết

$\hat{O}$ chung

OD = OB, giả thiết

suy ra: $\Delta OAD = \Delta OCB$ (c.g.c) $\Rightarrow$ AD = BC.

b. Xét hai tam giác ΔABE và ΔCDE, ta có:

$\hat{A} = \hat{C}$, theo kết quả câu a)

AB = OA – AB = OC – OD = CD, dựa theo giả thiết

$\hat{B}_1 = 180^0 - \hat{B}_2 = 180^0 - \hat{D}_2 = \hat{D}_1$, dựa theo kết quả câu a)

suy ra: $\Delta ABE = \Delta CDE$ (g.c.g)

c. Xét hai tam giác ΔAOE và ΔCOE, ta có: OA = OC, giả thiết

$\hat{A} = \hat{C}$, theo kết quả câu a)

AE = CE, theo kết quả câu b)

suy ra: ΔAOE và ΔCOE (c.g.c) $\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$

$\Leftrightarrow$ OE là tia phân giác của góc $x\hat{O}y$.

Nhận xét: Ví dụ trên, chỉ ra cho chúng ta một phương pháp để dựng tia phân giác của góc $x\hat{O}y$, cụ thể ta thực hiện:

Bước 1: Lấy các điểm A, B thuộc Ox. Lấy các điểm C, D thuộc Oy sao cho OC = OA và OD = OB.

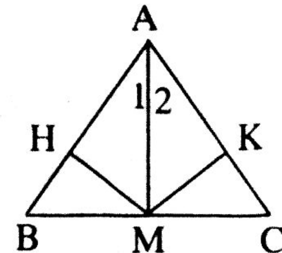
Bước 2: Xác định giao điểm I của AD và BC. Khi đó OI chính là tia phân giác của góc xOy.

Ví dụ 3: Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

a. Nếu đường trung tuyến AM đồng thời là đường phân giác của góc $\widehat{A}$ thì ΔABC cân tại A.

b. Nếu ΔABC cân tại A thì đường trung tuyến AM cũng đồng thời là đường phân giác của góc $\widehat{A}$.

Giải



a. Kẻ $MH \perp AB$, $MK \perp AC$.

Vì AM là phân giác góc $\widehat{A}$ nên MH = MK.

Xét hai tam giác vuông ΔHBM và ΔKCM, ta có:

MH = MK

BM = CM, vì AM là trung tuyến

suy ra: $\Delta HBM = \Delta KCM$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

b. Xét hai tam giác ΔAMB và ΔAMC, ta có: AB = AC, vì ΔABC cân tại A

$\widehat{B} = \widehat{C}$, vì ΔABC cân tại A

MB = MC, vì AM là trung tuyến

suy ra: $\Delta AMB = \Delta AMC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$

$\Leftrightarrow$ AM là đường phân giác của góc $\widehat{A}$.

Nhận xét: Câu a) còn có thể được chứng minh bằng cách lấy điểm A_1 trên tia AM sao cho $MA = MA_1$ - *Đề nghị các em học sinh thực hiện theo cách này.*

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu và chứng minh định lí thuận.

Câu hỏi 2: Phát biểu và chứng minh định lí đảo.

Câu hỏi 3: Nêu cách dựng đường phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho hai đường thẳng xx_1, yy_1 cắt nhau tại O.

a. Chứng minh hai tia phân giác Ot, Ot_1 của một cặp góc kề bù tạo thành một góc vuông.

b. Chứng minh rằng nếu M thuộc đường thẳng Ot hoặc Ot_1 thì M cách đều hai đường thẳng xx_1 và yy_1.

c. Chứng minh rằng nếu điểm cách đều hai đường thẳng xx_1 và yy_1 thì M thuộc đường thẳng Ot hoặc Ot_1.

d. Hãy đưa ra nhận xét về tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng cắt nhau xx_1, yy_1.

Bài tập 2. Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

a. Nếu đường cao AM đồng thời là đường phân giác của góc $\widehat{A}$ thì ΔABC cân tại A.

b. Nếu ΔABC cân tại A thì đường cao AM cũng đồng thời là đường phân giác của góc $\widehat{A}$.

Bài tập 3. Cho ΔABC. Chứng minh rằng hai đường phân giác của hai góc B và C và phân giác của góc $\hat{A}$ cùng đi qua một điểm.

Bài tập 4. Cho ΔABC, đường cao AH. Vẽ điểm D sao cho AB là đường trung trực của HD. Vẽ điểm E sao cho AC là đường trung trực của HE. Giả sử DE cắt AB, AC theo thứ tự tại I và K. Chứng minh rằng:

a. IB là tia phân giác của góc $\widehat{HID}$.

b. KC là tia phân giác của góc $\widehat{HKE}$.

c. HA là tia phân giác của góc $\widehat{IHK}$.

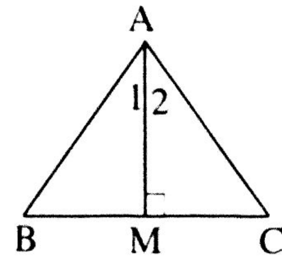
d. IC là tia phân giác của góc $\widehat{HIK}$, từ đó suy ra IC vuông góc với AB.

e. KB là tia phân giác của góc $\widehat{HKI}$, từ đó suy ra KB vuông góc với AC.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 2.



a. Xét hai tam giác vuông ΔABM và ΔACM, ta có:

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_1$, vì AM là phân giác góc $\widehat{A}$

AM chung

suy ra: ΔHBM = ΔKCM (góc nhọn – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \Leftrightarrow$ ΔABC cân tại A.

b. Xét hai tam giác vuông ΔAMB và ΔAMC, ta có:

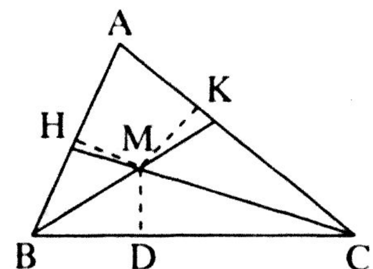
AB = AC, vì ΔABC cân tại A

$\hat{B} = \hat{C}$, vì ΔABC cân tại A

suy ra: ΔAMB = ΔAMC (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$

$\Leftrightarrow$ AM là đường phân giác của góc $\widehat{A}$.

Bài tập 3. Gọi M là giao điểm của hai đường phân giác của hai góc B và C. Ta cần đi chứng minh M thuộc tia phân giác của góc $\widehat{A}$.



Thật vậy, kẻ MH ⊥ AB, MD ⊥ BC, MK ⊥ AC

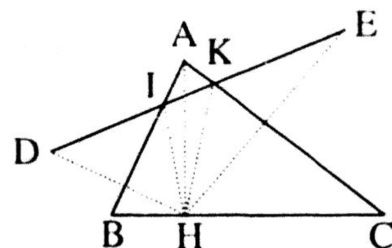
Ta có:

MH = MD, vì M thuộc tia phân giác góc B.

MK = MD, vì M thuộc tia phân giác góc C.

suy ra: MH = MK $\Leftrightarrow$ M thuộc là tia phân giác của góc $\widehat{A}$

Bài tập 4.



a. Vì ΔHID cân tại I nên IB là tia phân giác của góc $\widehat{HID}$.

b. Vì ΔHKE cân tại K nên KC là tia phân giác của góc $\widehat{HKE}$.

c. Trong ΔIHK, nhận xét rằng:

- Theo kết quả câu a) suy ra IA là phân giác ngoài của góc I.

- Theo kết quả câu b) suy ra KA là phân giác ngoài của góc K.

Từ đó, suy ra HA là tia phân giác của góc $\widehat{IHK}$.

d. Trong ΔIHK, nhận xét rằng:

- Theo kết quả câu b) ta có KC là phân giác ngoài của góc K.
- Theo kết quả câu c) ta có HA là tia phân giác của góc H.

  Mặt khác: HA ⊥ HC ⇒ HC là phân giác ngoài của góc H.

Từ đó, suy ra IC là tia phân giác của góc $\widehat{HIK}$.

Trong ΔIHD, nhận xét rằng:

- IB là tia phân giác của góc I.
- IC là tia phân giác ngoài của góc I.

Từ đó, suy ra: IC ⊥ IB ⇔ IC ⊥ AB.

KB là tia phân giác của góc $\widehat{HKI}$, từ đó suy ra KB vuông góc với AC.

e. Chứng minh tương tự như câu d) - *Đề nghị học sinh tự làm.*



TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

Ta có định nghĩa:

- *Trong ΔABC, tia phân giác của góc $\hat{A}$ cắt cạnh BC tại điểm M, khi đó đoạn thẳng AM được gọi là đường phân giác (xuất phát từ đỉnh A) của ΔABC. Đôi khi, ta cũng gọi đường thẳng AM là đường phân giác của ΔABC.*
- *Mỗi tam giác có ba đường phân giác.*

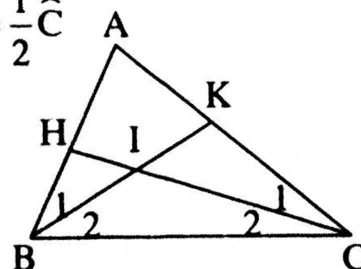
Chú ý: Chúng ta đã có được các kết quả:

"Trong tam giác cân đường phân giác xuất phát từ đỉnh thì cũng là đường cao, đường trung tuyến, đường trung trực của cạnh đáy".

Thí dụ 1: Cho ΔABC, các đường phân giác BK, CH cắt nhau tại I. Tính so đo của góc $\widehat{A}$, biết $\widehat{BIC} = 125^0$.

Giải

Vì BK, CH là các đường phân giác nên: $\hat{B}_2 = \frac{1}{2}\hat{B}$, $\hat{C}_2 = \frac{1}{2}\hat{C}$



Trong ΔIBC, ta có: $\hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 180^0 - B\hat{I}C$

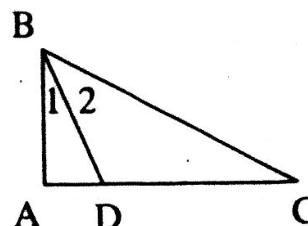
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\hat{B} + \hat{C}\right) = 180^0 - 125^0 = 55^0 \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{C} = 110^0$

Trong ΔABC, ta có: $\hat{A} = 180^0 - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^0 - 110^0 = 70^0$.

Vậy, ta có $\widehat{A} = 70^0$.

Thí dụ 2: Cho ΔABC vuông tại A, có AB = 3cm, $\hat{B} = 60^0$. Tính độ dài đường phân giác BD.

Giải



Đặt BD = x. Trong ΔABD vuông tại A, ta có:

$\hat{B}_1 = 30^0$, vì $\hat{B} = 60^0 \Leftrightarrow AD = \frac{1}{2}BD = \frac{x}{2}$.

$BD^2 = AB^2 + AD^2 \Leftrightarrow x^2 = 9 + \frac{x^2}{4}$

$\Leftrightarrow 4x^2 = 36 + x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 = 12 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}$ cm.

Vậy, độ dài phân giác BD = $2\sqrt{3}$ cm.

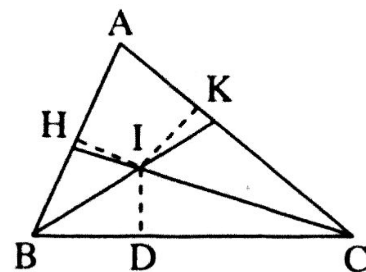
2. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

Chúng ta đã biết được "*Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm*" và câu hỏi đặt ra là "*Ba đường phân giác của tam giác có tính chất này không?*", câu trả lời là có và chúng ta sẽ chứng minh nhận định này thông qua thí dụ sau:

Thí dụ 3: Chứng minh rằng ba đường phân giác của tam giác cùng đi qua một điểm.

Giải

Xét ΔABC, gọi I là giao điểm của hai đường phân giác của hai góc B và C. Ta cần đi chứng minh I thuộc tia phân giác của góc $\widehat{A}$.



Thật vậy, kẻ $IH \perp AB$, $ID \perp BC$, $IK \perp AC$, suy ra:

IH = ID, vì I thuộc tia phân giác góc B.

IK = ID, vì I thuộc tia phân giác góc C.

suy ra: IH = IK $\Leftrightarrow$ I thuộc là tia phân giác của góc $\widehat{A}$.

Tức là, ba đường phân giác của ΔABC cùng đi qua điểm I và ta có thêm IH = IK = ID, nghĩa là điểm I cách đều ba cạnh của ΔABC.

Như vậy, ta có kết quả sau:

Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó.

Nhận xét: Từ kết quả trên ta suy ra được:

1. Để tìm điểm I trong ΔABC cách đều ba cạnh của tam giác, ta chỉ cần dựng hai tia phân giác của hai góc và khi đó giao điểm I của chúng là điểm cần tìm.

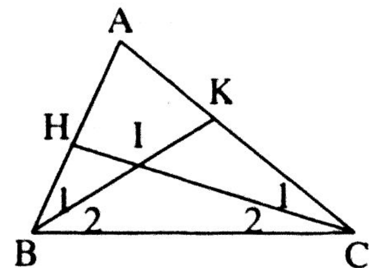
2. Nếu hai đường phân giác góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại I thì AI chính là tia phân giác của góc $\widehat{A}$.

Thí dụ 4: Cho ΔABC có $\hat{A} = 80^0$, các đường phân giác BK, CH cắt nhau tại I.

a. Nối IA, tính số đo góc $\widehat{BAI}$.

b. Tính số đo góc $\widehat{BAI}$.

Giải



a. Ta thấy ngay IA là phân giác của góc $\hat{A}$ nên:

$$\widehat{BAI} = \frac{1}{2}\hat{A} = 40^0.$$

Vậy, ta có $\widehat{BAI} = 40^0$.

b. Trong ΔABC, ta có: $\hat{B} + \hat{C} = 180^0 - \hat{A} = 180^0 - 80^0 = 100^0$.

Vì BK, CH là các đường phân giác nên: $\hat{B}_2 = \frac{1}{2}\hat{B}$, $\hat{C}_2 = \frac{1}{2}\hat{C}$.

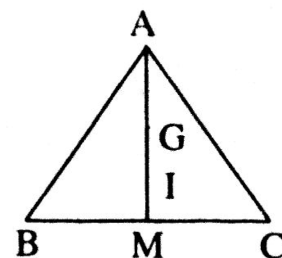
Trong ΔIBC, ta có: $\widehat{BIC} = 180^0 - \left(\hat{B}_2 + \hat{C}_2\right) = 180^0 - \left(\frac{1}{2}\hat{B} + \frac{1}{2}\hat{C}\right)$

$$= 180^0 - \frac{1}{2}(B + C) = 180^0 - \frac{1}{2}.100^0 = 130^0$$

Vậy, ta có $\widehat{BIC} = 130^0$.

Thí dụ 5: Cho ΔABC cân tại A. Gọi G là trọng tâm của tam giác, gọi I là giao điểm các đường phân giác của tam giác. Chứng minh rằng ba điểm A, G, I thẳng hàng.

Giải



Ta có ngay:

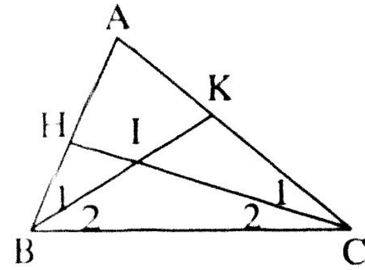
- G thuộc trung tuyến AM.
- ΔABC cân tại A nên AM cũng là đường phân giác, do đó I thuộc AM.

Vậy, ba điểm A, G, I thẳng hàng.

Nhận xét: Nếu ΔABC là tam giác đều thì ba đường trung tuyến chính là ba đường phân giác, do đó trọng tâm G cách đều ba cạnh của tam giác.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, các đường phân giác BK, CH cắt nhau tại I. Chứng minh rằng $\widehat{BIC}$ là góc tù.



Giải

Trong ΔABC, ta có: $\hat{B} + \hat{C} = 180^0 - \hat{A}$

Vì BK, CH là các đường phân giác nên:

$$\hat{B}_2 = \frac{1}{2}\hat{B},\ \hat{C}_2 = \frac{1}{2}\hat{C}.$$

Trong ΔIBC, ta có:

$$\widehat{BIC} = 180^0 - \left(\hat{B}_2 + \hat{C}_2\right) = 180^0 - \left(\frac{1}{2}\hat{B} + \frac{1}{2}\hat{C}\right)$$

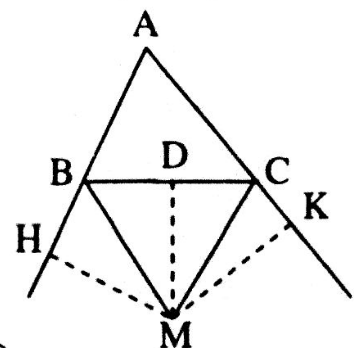
$$= 180^0 - \frac{1}{2}\left(\hat{B} + \hat{C}\right) = 180^0 - \frac{1}{2}\left(180^0 - \hat{A}\right) = 90^0 + \frac{\hat{A}}{2} > 90^0$$

Vậy, ta có $\widehat{BIC}$ là góc tù.

Ví dụ 2: Cho ΔABC. Hai đường phân giác của hai góc B và C cắt nhau tại I. Hai đường phân giác của hai góc ngoài tại B và C cắt nhau tại M. Chứng minh rằng A, I, M thẳng hàng.

Giải

Từ giả thiết, hai đường phân giác của hai góc B và C cắt nhau tại I suy ra AI là tia phân giác của góc A.



Ta đi chứng minh M thuộc tia phân giác của góc $\hat{A}$.

Thật vậy, kẻ $MH \perp AB$, $MD \perp BC$, $MK \perp AC$, suy ra:

MH = MD, vì M thuộc tia phân giác góc ngoài tại B.

MK = MD, vì M thuộc tia phân giác góc ngoài tại C.

suy ra: MH = MK $\Leftrightarrow$ M thuộc là tia phân giác của góc $\widehat{A}$.

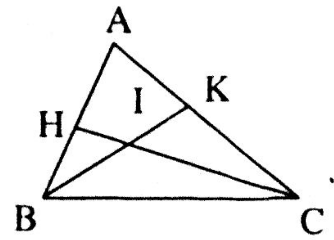
Vậy, ba điểm, A, I, M thẳng hàng.

Ví dụ 3: Cho ΔABC. Hãy tìm điểm sao cho:

a. Khoảng cách từ nó đến các đường thẳng AB, BC, AC bằng nhau.

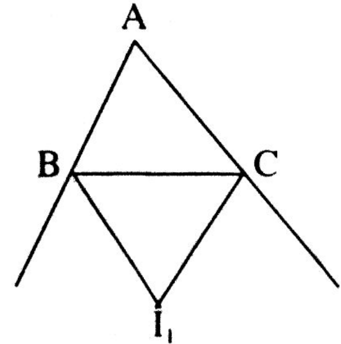
b. Khoảng cách từ nó đến các đường thẳng AB, BC, AC bằng nhau và khoảng cách này là ngắn nhất.

Giải



a. Điểm I thoả mãn điều kiện đầu bài, có thể là:

Trường hợp 1: Điểm I là giao điểm ba đường phân giác của ΔABC, khi đó theo tính chất thì khoảng cách từ I đến các đường thẳng AB, BC, AC bằng nhau.



Trường hợp 2: Dựa trên kết quả đã được chứng minh " *Cho ΔABC. Hai đường phân giác của hai góc ngoài tại B và C và phân giác trong của góc Â cùng đi qua một điểm* ", khi đó ta nhận được điểm I_1.

Trường hợp 3: Tương tự, chúng ta nhận được điểm I_2 là giao điểm của hai đường phân giác của hai góc ngoài tại C và A.

Trường hợp 4: Tương tự, chúng ta nhận được điểm I_3 là giao điểm của hai đường phân giác của hai góc ngoài tại A và B.

Vậy, ta tìm được 4 điểm I, I_1, I_2, I_3 cách đều các đường thẳng AB, BC, AC.

b. Khoảng cách từ I đến các đường thẳng AB, BC, AC bằng nhau và khoảng cách này là ngắn nhất.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa đường phân giác của tam giác. Tại sao mỗi tam giác chỉ có đúng ba đường phân giác ?

Câu hỏi 2: Phát biểu và chứng minh tính chất của ba đường phân giác của một tam giác.

Câu hỏi 3: Trọng tâm của tam giác đều có cách đều ba cạnh của nó không ? Vì sao ?

Câu hỏi 4: Chứng minh rằng nếu tam giác có đường trung tuyến đồng thời là đường phân giác thì tam giác đó là một tam giác cân.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 60^0$, các đường phân giác BK, CH cắt nhau tại I.

a. Tính số đo góc $\widehat{BAI}$.

b. Tính số đo góc $\widehat{BIC}$.

c. Điểm I có cách đều ba cạnh của ΔABC không ? Vì sao ?

Bài tập 2. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 2(\hat{B} + \hat{C})$, các đường phân giác BK, CH cắt nhau tại I. Tính số đo góc $\widehat{BIC}$, biết:

a. $\widehat{A} = \alpha$.

b. $\widehat{A} = 2(\hat{B} + \hat{C})$.

Bài tập 3. Cho ΔABC, các đường phân giác BK, CH cắt nhau tại I. Tính so đo của góc $\widehat{A}$, biết:

a. $\widehat{BIC} = 121^0$.

b. $\widehat{BIC} = \alpha$, với $\alpha > 90^0$.

Bài tập 4. Cho ΔABC vuông tại A. Tính độ dài đường phân giác BD, biết:

a. $AB = 6cm$, $\hat{B} = 60^0$.

b. $AB = 9cm$, $\hat{C} = 30^0$.

c. $AB = 3cm$, $AC = 3\sqrt{3}$.

Bài tập 5. Cho ΔABC cân tại A. Gọi M là trung điểm BC, Gọi E, F là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC. Chứng minh rằng ME = MF.

Bài tập 6. Cho ΔABC cân tại A. Các đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I. Chứng minh rằng AI đi qua trung điểm của BC.

Bài tập 7. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 120^0$. Các đường phân giác AD, BE, CF.

a. Chứng minh rằng DE là tia phân giác của $\widehat{ADC}$.

b. Tính số đo của góc $\widehat{EDF}$.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. $\widehat{BAI} = 30^0$.

b. $\widehat{BIC} = 120^0$.

c. Điểm I có cách đều ba cạnh của ΔABC vì nó là giao điểm của ba đường phân giác.

Bài tập 2.

a. *Học sinh tự làm.*

b. Xét ΔABC, ta có: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow 2(\hat{B} + \hat{C}) + \hat{B} + \hat{C} = 180^0$

$$\Leftrightarrow 3(\hat{B} + \hat{C}) = 180^0 \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{C} = 60^0$$

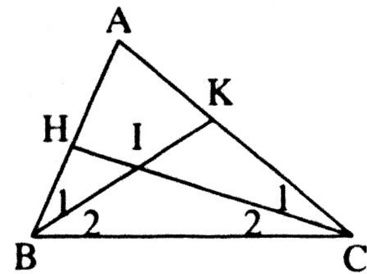
Vì BK, CH là các đường phân giác nên: $\hat{B}_2 = \frac{1}{2}\hat{B},\ \hat{C}_2 = \frac{1}{2}\hat{C}$

Trong ΔIBC, ta có: $\widehat{BIC} = 180^0 - \left(\hat{B}_2 + \hat{C}_2\right) = 180^0 - \left(\frac{1}{2}\hat{B} + \frac{1}{2}\hat{C}\right)$

$$= 180^0 - \frac{1}{2}\left(\hat{B} + \hat{C}\right) = 180^0 - \frac{1}{2}60^0 = 150^0$$

Vậy, ta có $\widehat{BIC} = 150^0$.

Bài tập 3.



a. $\hat{A} = 62^0$.

b. Vì BK, CH là các đường phân giác nên:

$$\hat{B}_2 = \frac{1}{2}\hat{B},\ \hat{C}_2 = \frac{1}{2}\hat{C}$$

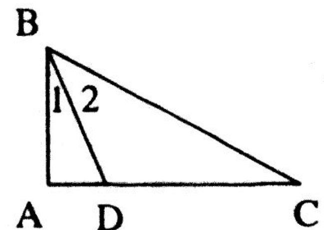
Trong ΔIBC, ta có:

$$\hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 180^0 - B\hat{I}C \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\hat{B} + \hat{C}\right) = 180^0 - \alpha \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{C} = 60^0 - 2\alpha$$

Trong ΔABC, ta có: $\hat{A} = 180^0 - \left(\hat{B} + \hat{C}\right) = 180^0 - 360^0 + 2\alpha = 2\alpha - 180^0$

Vậy, ta có $\hat{A} = 2\alpha - 180^0$.

Bài tập 4. Đặt BD = x.



a. Trong ΔABD vuông tại A, ta có:

$$\hat{B}_1 = 30^0, \text{ vì } \hat{B} = 60^0 \Leftrightarrow AD = \frac{1}{2}BD = \frac{x}{2}.$$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 \Leftrightarrow x^2 = 36 + \frac{x^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 144 + x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 144 \Leftrightarrow x^2 = 48 \Leftrightarrow x = 4\sqrt{3}\text{ cm}.$$

Vậy, độ dài phân giác $BD = 4\sqrt{3}$ cm.

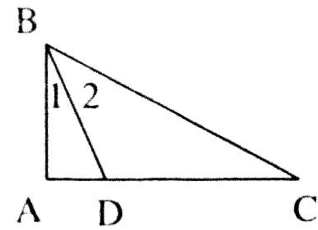
b. Học sinh tự làm tương tự câu a) với nhận xét $\hat{B} = 90^0 - \hat{C} = 60^0$.

c. Trong ΔABC vuông tại A, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9 + 27 = 36$$

$$\Leftrightarrow BC = 6 = 2AB \Leftrightarrow \hat{B} = 60^0.$$

Trong ΔABD vuông tại A, ta có:



$\hat{B}_1 = 30^0$, vì $\hat{B} = 60^0 \Leftrightarrow AD = \frac{1}{2}BD = \frac{x}{2}$.

$BD^2 = AB^2 + AD^2 \Leftrightarrow x^2 = 9 + \frac{x^2}{4}$

$\Leftrightarrow 4x^2 = 36 + x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 = 12 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}$ cm.

Vậy, độ dài phân giác $BD = 2\sqrt{3}$.

Bài tập 5. Vì ΔABC cân tại A nên AM vừa là đường trung tuyến vừa là phân giác của góc Â, suy ra điểm M cách đều hai cạnh AB và AC, tức là ME = MF.

Bài tập 6. Nhận xét rằng:

- Các đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I nên AI là tia phân giác góc Â.
- ΔABC cân tại A nên AI cũng là đường trung tuyến, do đó tia AI đi qua trung điểm của BC.



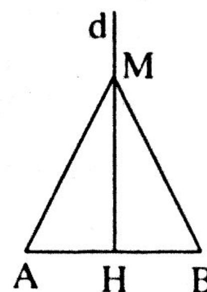
TÍNH CHẤT ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH LÍ VỀ TÍNH CHẤT CÁC ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG TRUNG TRỰC

Chúng ta mới chỉ biết rằng "*Đường trung trực của một đoạn thẳng thì đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó* " mà chưa được làm quen với tính chất điểm của đường trung trực. Để tiện cho việc bắt đầu chúng ta thực hiện thí dụ sau:

Thí dụ 1: Cho đoạn thẳng AB. Trên đường trung trực d của AB lấy điểm M bất kì. Chứng minh rằng MA = MB.



Giải

Gọi H là trung điểm AB.

Xét hai tam giác vuông ΔAMH và ΔBMH, ta có:

MH chung

AH = BH, vì H là trung điểm AB

do đó: ΔAMH = ΔBMH (hai cạnh góc vuông) ⇒ MA = MB, đpcm.

Như vậy, ta có kết quả (được gọi là *định lí thuận*) như sau:

Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.

Như vậy, với đoạn thẳng AB và đường trung trực d của nó thì

$$M \in d \Rightarrow MA = MB.$$

Nhận xét: Từ kết quả của định lí trên gợi ý cho chúng ta giải bài toán " *Tìm điểm M thuộc hình (H) cách đều hai điểm A và B cho trước* ", bởi khi đó M chính là giao điểm của (H) với đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Thí dụ 2: Cho ΔABC. Tìm điểm D sao cho D cách đều hai cạnh của góc B và D cách đều hai điểm A và C.

Giải

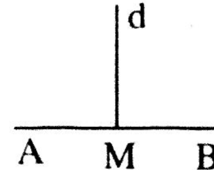
Ta thấy ngay, điểm D phải tìm là giao điểm của tia phân giác góc B với đường trung trực của AC.

Nhận xét: Tới đây, một câu hỏi thường được các em học sinh đặt ra là " *Điều ngược lại của định lí trên có đúng không ?* ". Tức là " *Một điểm cách đều hai đầu mút của một đoạn thẳng cho trước thì có nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó không ?* ", để trả lời câu hỏi này chúng ta xem xét tiếp thí dụ sau.

Thí dụ 3: Cho MA = MB. Chứng tỏ rằng M thuộc đường trung trực của AB.

Giải

Xét hai trường hợp:



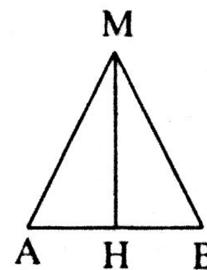
Trường hợp 1: Nếu $M \in AB$ thì vì

$MA = MB \Rightarrow$ M là trung điểm của AB

$\Rightarrow$ M thuộc đường trung trực của AB.

Trường hợp 2: Nếu $M \notin AB$

Kẻ $MH \perp AB$, ta phải đi chứng minh HA = HB.



Thật vậy, xét hai tam giác vuông ΔAMH và ΔBMH, ta có:

MH chung

AM = BM, giả thiết

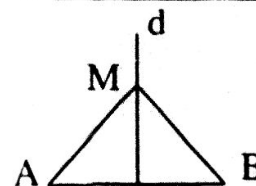
do đó: $\Delta AMH = \Delta BMH$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow$ HA = HB, đpcm.

Như vậy, ta có kết quả (được gọi là *định lí đảo*) như sau:

Điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.

Như vậy, với đoạn thẳng AB và đường trung trực d của nó thì



$$M \in d \Leftrightarrow MA = MB.$$

Thí dụ 4: Cho ba tam giác cân ΔDBC, ΔEBC, ΔFBC chung đáy BC. Chứng minh rằng ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Giải

Gọi d là đường trung trực của BC, ta lần lượt nhận xét:

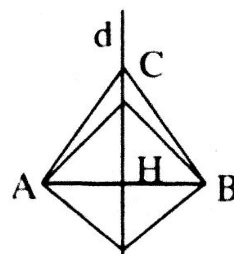
- ΔDBC cân tại D nên: $DB = DC \Rightarrow D \in d$.
- ΔEBC cân tại E nên: $EB = EC \Rightarrow E \in d$.
- ΔFBC cân tại F nên: $FB = FC \Rightarrow F \in d$.

Vậy, ba điểm D, E, F cùng thuộc đường thẳng d nên chúng thẳng hàng.

Từ hai định lí trên ta có:

Tập hợp các điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.

Nhận xét: Như vậy, với AB cho trước thì tập hợp các điểm C sao cho ΔABC cân tại C là đường trung trực của đoạn thẳng AB, trừ trung điểm M của AB.



2. CÁCH DỰNG ĐƯỜNG TRUNG TRỰC

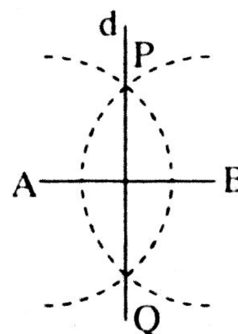
Để dựng đường trung trực d của đoạn thẳng AB cho trước bằng thước và compa, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm A làm tâm vẽ cung tròn có bán kính $R > \frac{1}{2}AB$.

Lấy điểm B làm tâm vẽ cung tròn có bán kính R.

Hai cung tròn này cắt nhau tại P và Q.

Bước 2: Dùng thức vẽ đường thẳng PQ, đó là đường trung trực d của đoạn thẳng AB.

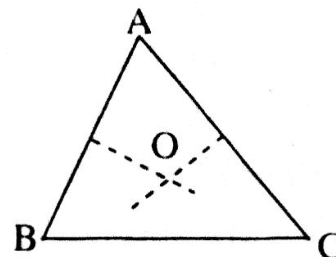


Chú ý:

1. Khi vẽ hai cung tròn trên, ta phải lấy bán kính $R > \frac{1}{2}AB$ thì hai cung tròn đó mới có hai điểm chung.
2. Giao điểm của đường thẳng PQ với đoạn thẳng AB là trung điểm của đoạn thẳng AB, do đó cách dựng trên cũng là cách dựng trung điểm của đoạn thẳng bằng thước và compa.

Thí dụ 5: Cho ΔABC. Hai đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O. Chứng minh rằng O thuộc đường trung trực của BC.

Giải



Ta cần đi chứng minh OB = OC.

Thật vậy, ta có:

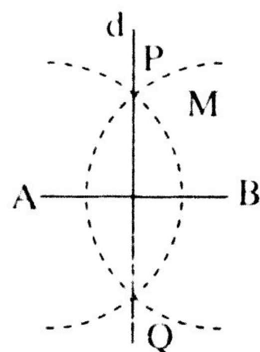
OA = OB, vì O thuộc đường trung trực của AB.

OA = OC, vì O thuộc đường trung trực của AC.

suy ra: OB = OC ⇔ O thuộc đường trung trực của BC.

Nhận xét: Như vậy, để thực hiện thí dụ trên chúng đã sử dụng cả định lí thuận và định lí đảo.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ



Ví dụ 1: Cho hình vẽ:

a. Chứng minh rằng PQ là đường trung trực của AB

b. Chứng minh rằng MA > MB.

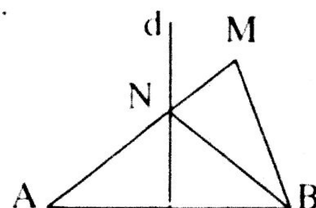
Giải

a. Từ hình vẽ, ta có ngay:

PA = PB = R ⇒ P thuộc đường trung trực của AB.

QA = QB = R ⇒ Q thuộc đường trung trực của AB.

Vậy, PQ là đường trung trực của AB.



b. Gọi N là giao điểm của AM với d, suy ra NA = NB.

Trong ΔBMN, ta có:

MB < MN + NB = MN + NA = AM, đpcm.

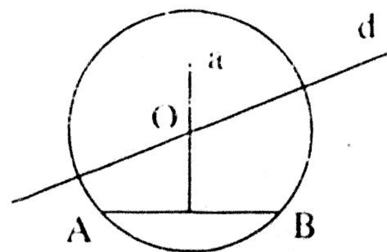
Nhận xét: Như vậy, để chứng minh đường thẳng d là đường trung trực của đoạn thẳng AB chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Chứng minh d đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với AB.

Cách 2: Lấy hai điểm P, Q trên d. Ta đi chứng minh PA = PB và QA = QB.

Ví dụ 2: Cho hai điểm A, B và đường thẳng d sao cho AB không vuông góc với d. Vẽ đường tròn có tâm O thuộc d và đi qua hai điểm A, B.

Giải

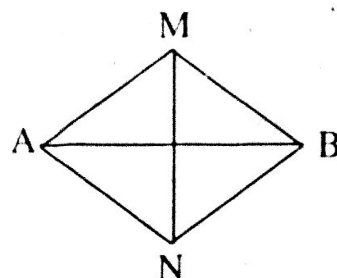


Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng đường trung trực a của đoạn thẳng AB.
- Vì AB không vuông góc với d nên a cắt đường thẳng d tại O.
- Vẽ đường tròn có tâm O bán kính OA.

Ví dụ 3: Cho hai điểm M, N nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB. Chứng minh rằng ΔAMN = ΔBMN.

Giải



Xét hai tam giác ΔAMN và ΔBMN, ta có:

MN chung

MA = MB, vì M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB

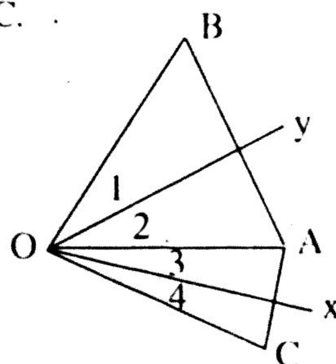
NA = NB, vì N nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB

do đó ΔAMN = ΔBMN (c.c.c).

Ví dụ 4: Cho góc $\widehat{xOy} = 80^0$, điểm A nằm trong góc $\widehat{xOy}$. Vẽ điểm B sao cho Ox là đường trung trực của AB. Vẽ điểm C sao cho Oy là đường trung trực của AC.

a. Chứng minh rằng O thuộc đường trung trực của BC.

b. Tính số đo góc $\widehat{BOC}$.



Giải

a. Nhận xét rằng:

- OA = OB, vì Ox là đường trung trực của AB
- OA = OC, vì Oy là đường trung trực của AC

do đó: OB = OC $\Rightarrow$ O thuộc đường trung trực của BC.

b. Nhận xét rằng:

- ΔOAB cân tại O nên $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$.
- ΔOAC cân tại O nên $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$.

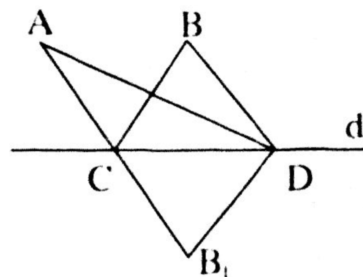
Khi đó: $B\hat{O}C = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3)$

$$= 2\widehat{xOy} = 2.80^0 = 160^0.$$ Vậy, ta được $\widehat{BOC} = 160^0$.

Chú ý: Chúng ta đã được làm quen với dạng toán "*Cho hai điểm A, B ở về cùng một phía với đường thẳng d. Tìm điểm C trên d sao cho CA + CB nhỏ nhất*", tuy nhiên khi đã có thêm kiến thức về tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng chúng ta có thể trình bày lời giải của bài toán này một cách đơn giản hơn. Ví dụ sau sẽ minh hoạ nhận định này.

Ví dụ 5: Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm về một phía của đường thẳng d. Tìm trên đường thẳng d điểm C sao cho CA + CB nhỏ nhất.

Giải



Vẽ điểm B_1 sao cho d là trung trực của BB_1.

Gọi C là giao điểm của AB_1 và d và D là điểm bất kì trên d ($D \neq C$). Ta có ngay: $CB = CB_1$; $DB = DB_1$.

Trong ΔAB_1D, ta luôn có:

$$AB_1 < DA + DB_1 \Leftrightarrow CA + CB_1 < DA + DB_1 \Leftrightarrow CA + CB < DA + DB.$$

Vậy, điểm C cần tìm chính là giao điểm của AB_1 và d.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu và chứng minh định lí thuận.

Câu hỏi 2: Phát biểu và chứng minh định lí đảo.

Câu hỏi 3: Nêu cách dựng đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Câu hỏi 4: Với AB cho trước, tìm tập hợp các điểm C sao cho ΔABC cân tại C.

Câu hỏi 5: Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm về một phía của đường thẳng d. Tìm trên đường thẳng d điểm C sao cho CA + CB nhỏ nhất.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho ΔABC. Tìm điểm O sao cho:

a. O thuộc trung tuyến AM và cách đều hai đỉnh A, B.

b. O cách đều các đỉnh A, B, C.

c. O cách đều các đỉnh A, C và cách đều các cạnh của góc $\hat{A}$.

Bài tập 2. Cho góc $\widehat{xOy} = 60^0$, điểm A nằm trong góc $\widehat{xOy}$. Vẽ điểm B sao cho Ox là đường trung trực của AB. Vẽ điểm C sao cho Oy là đường trung trực của AC.

a. Chứng minh rằng OB = OC.

b. Tính số đo góc $\widehat{BOC}$.

Bài tập 3. Cho góc $\widehat{xOy} = 120^0$, điểm A nằm trong góc $\widehat{xOy}$ sao cho $\widehat{xOA}$, $\widehat{yOA} < 90^0$. Vẽ điểm B sao cho Ox là đường trung trực của AB. Vẽ điểm C sao cho Oy là đường trung trực của AC.

a. Chứng minh rằng OB = OC.

b. Tính số đo góc $\widehat{BOC}$.

Bài tập 4. Cho góc $\widehat{xOy}$, điểm A nằm trong góc $\widehat{xOy}$. Vẽ điểm B sao cho Ox là đường trung trực của AB. Vẽ điểm C sao cho Oy là đường trung trực của AC. Tính số đo của góc xÔy, biết $\widehat{BOC} = 110^0$.

Bài tập 5. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 60^0$. Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O. Tính số đo của các góc đỉnh O.

Bài tập 6. Cho ΔABC. Tìm trên đường phân giác ngoài góc $\widehat{A}$ điểm M sao cho MB + MC nhỏ nhất.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. O là giao điểm của trung tuyến AM với đường trung trực của AB.

b. O là giao điểm của hai đường trung trực của AB và AC.

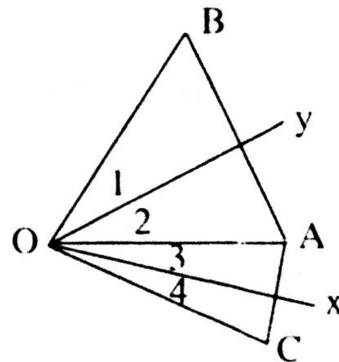
c. O là giao điểm của phân giác góc $\hat{A}$ với đường trung trực của AC.

Bài tập 2.

a. Nhận xét rằng:

- OA = OB, vì Ox là đường trung trực của AB
- OA = OC, vì Oy là đường trung trực của AC

do đó OB = OC.



b. Nhận xét rằng:

- ΔOAB cân tại O nên $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.
- ΔOAC cân tại O nên $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$.

Khi đó:

$$B\hat{O}C = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3)$$

$$= 2\widehat{xOy} = 2.60^0 = 120^0.$$

Vậy, ta được $\widehat{BOC} = 120^0$.

Bài tập 3. *Tham khảo bài tập 2 với chú ý góc xÔy là góc tù.*

Bài tập 4. $\widehat{xOy} = 55^0$.

Bài tập 5. *Sử dụng tính chất góc có cạnh tương ứng vuông góc.*

Bài tập 6. *Tham khảo ví dụ 5.*



TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC

Ta có định nghĩa:

- *Trong một tam giác đường trung trực của mỗi cạnh gọi là đường trung trực của tam giác đó.*
- *Mỗi tam giác có ba đường trung trực.*

Chú ý:
1. Trong một tam giác bất kì, đường trung trực của một cạnh không nhất thiết đi qua đỉnh đối diện của cạnh ấy. Tuy nhiên, trong tam giác cân đường trung trực của cạnh đáy luôn đi qua đỉnh đối diện với cạnh đó.
2. Chúng ta đã có được các kết quả:

   " *Trong tam giác cân đường trung trực của cạnh đáy đồng thời là đường cao, đường trung tuyến của cạnh đáy* ".

Thí dụ 1: Cho ΔABC cân tại A, đường trung tuyến AM. Đường trung trực của AC cắt AM tại O. Chứng minh rằng OA = OB.

Giải

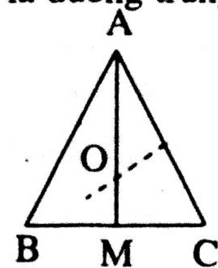
Vì ΔABC cân tại A nên đường trung tuyến AM cũng chính là đường trung trực của BC, do đó:

$OB = OC.$ (1)

Vì O thuộc đường trung trực của AC nên:

$OA = OC.$ (2)

Từ (1), (2) suy ra OA = OB.



2. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC

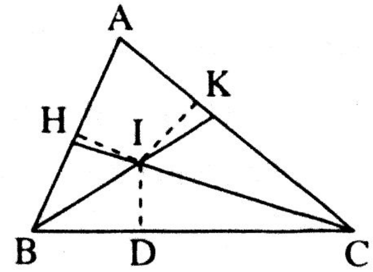
Chúng ta đã biết được "*Ba đường trung tuyến, ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm*" và câu hỏi đặt ra là "*Ba đường trung trực của tam giác có tính chất này khôn ?*", câu trả lời là có và chúng ta sẽ chứng minh nhận định này thông qua thí dụ sau:

Thí dụ 2: Chứng minh rằng ba đường trung trực của tam giác cùng đi qua một điểm.

Giải

Xét ΔABC, gọi O là giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh AB và AC. Ta cần đi chứng minh O thuộc đường trung trực cạnh BC.

Thật vậy, ta có ngay:



OA = OB, vì O thuộc trung trực của AB.

OA = OC, vì O thuộc trung trực của AC.

suy ra: OB = OC ⇒ O thuộc trung trực của BC.

Tức là, ba đường trung trực của ΔABC cùng đi qua điểm O và ta có thêm OA = OB = OC, nghĩa là điểm O cách đều ba đỉnh của ΔABC.

Như vậy, ta có kết quả sau:

Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác đó.

Nhận xét: Từ kết quả trên ta suy ra được:

1. Để tìm điểm O cách đều ba đỉnh của tam giác ΔABC, ta chỉ cần dựng hai đường trung trực của hai cạnh và khi đó giao điểm O của chúng là điểm cần tìm.
2. Nếu hai đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O thì OM (với M là trung điểm của BC) chính là đường trung trực của BC.

Và, ta gọi O là tâm đường tròn ngoài tiếp ΔABC.

Thí dụ 3: Vẽ đường tròn ngoại tiếp ΔABC trong các trường hợp:

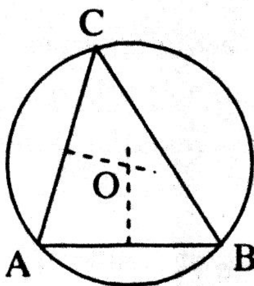
a. ΔABC nhọn.

b. ΔABC vuông tại A.

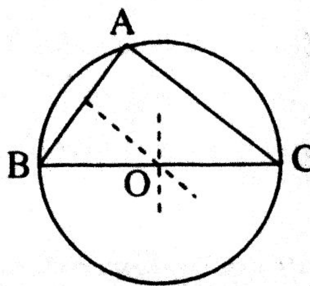
c. ΔABC có $\widehat{A} > 90^0$.

Giải

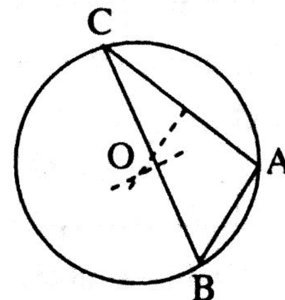
Ta có được các hình vẽ sau:



ΔABC nhọn



ΔABC vuông tại A



ΔABC có $\hat{A} > 90^0$

Nhận xét: Qua thí dụ trên, ta có được nhận xét:

- Nếu ΔABC nhọn thì tâm O ở bên trong ΔABC.
- Nếu ΔABC vuông tại A thì tâm O là trung điểm BC.
- Nếu ΔABC có $\hat{A} > 90^0$ thì tâm O ở bên ngoài ΔABC.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Xác định dạng của ΔABC, biết giao điểm của ba đường trung trực, trọng tâm G và điểm A thẳng hàng.

Giải

Từ giả thiết, suy ra giao điểm của ba đường trung trực thuộc AG nên AG là đường trung trực của BC, suy ra ΔABC cân tại A.

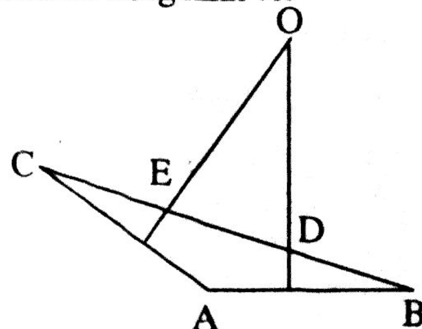
Nhận xét: Trong tam giác đều, giao điểm của ba đường phân giác, giao điểm của ba đường trung tuyến, , giao điểm của ba đường trung trực trùng nhau.

Ví dụ 2: Cho ΔABC có $\widehat{A} > 90^0$. Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O và cắt BC theo thứ tự tại D, E.

a. Các ΔABD, ΔACE là tam giác gì ?

b. Đường tròn tâm O bán kính OA đi qua những điểm nào trong hình vẽ.

Giải



a. Nhận xét rằng:

- Vì D thuộc đường trung trực của AB nên:

  DA = DB ⇔ ΔABD cân tại D.

- Vì E thuộc đường trung trực của AC nên:

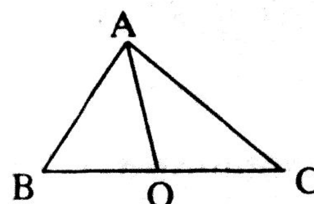
  EA = EC ⇔ ΔACE cân tại E.

b. Đường tròn tâm O bán kính OA đi qua các điểm B và C, do đó nó là đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng các đường trung trực của tam giác vuông đi qua trung điểm của cạnh huyền.

Giải

Xét ΔABC vuông tại A, để thực hiện bài toán chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:



Cách 1: Gọi O là trung điểm của BC, ta có:

- O thuộc đường trung trực của BC.

- $OA = \frac{1}{2}BC$ suy ra:

  $OA = OB \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của AB.

Vậy, các đường trung trực của tam giác vuông đi qua trung điểm của cạnh huyền.

Cách 2: Gọi M là trung điểm của AB, giả sử đường trung trực của AB cắt BC tại O. Ta cần đi chứng minh O thuộc đường trung trực của AC.

Xét hai tam giác vuông ΔOMA và ΔOMB, có:

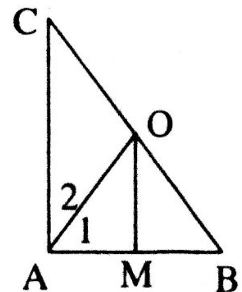
OM chung

$MA = MB$

do đó: $\Delta OMA = \Delta OMB$ (hai cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{B} \Leftrightarrow \widehat{A}_2 = \widehat{C} \Leftrightarrow \Delta OAC$ cân tại O

$\Leftrightarrow OA = OC \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của AC.



Cách 3: Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, giả sử hai đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O. Ta cần đi chứng minh O thuộc BC.

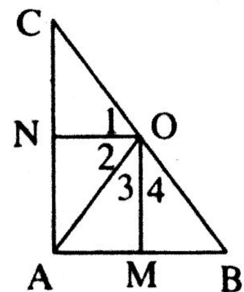
Ta có ngay: $\widehat{MON} = \widehat{A} = 90^0$.

Vì O thuộc đường trung trực của AC nên:

$OA = OC \Leftrightarrow \Delta OAC$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$.

Vì O thuộc đường trung trực của AB nên:

$OA = OB \Leftrightarrow \Delta OAB$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$.



Khi đó: $\widehat{BOC} = \widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 + \widehat{O}_4 = 2\widehat{O}_2 + 2\widehat{O}_3 = 2(\widehat{O}_2 + \widehat{O}_3)$

$= 2\widehat{MON} = 2.90^0 = 180^0$

$\Leftrightarrow$ B, O, C thẳng hàng $\Leftrightarrow O \in BC$, đpcm.

Ví dụ 4: Cho ΔABC cân tại A, có $\widehat{B} = 36^0$. Gọi O là giao điểm của ba đường trung trực, I là giao điểm của ba đường phân giác. Chứng minh rằng BC là đường trung trực của OI.

Giải

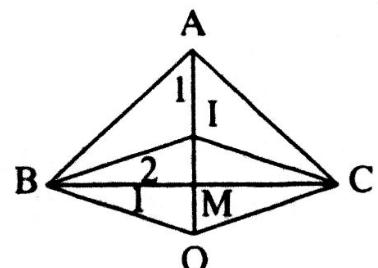
Ta có ngay: $BC \perp OI$.

$\widehat{A} = 180^0 - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^0 - (36^0 + 36^0) = 108^0$

$\Leftrightarrow \widehat{A}_1 = 54^0$.

Mặt khác, ta có: $OA = OB \Leftrightarrow \Delta OAB$ cân tại O

$\Leftrightarrow \widehat{OBA} = \widehat{A}_1 = 54^0$.



$\hat{B}_1 = \widehat{OBA} - \hat{B} = 54^0 - 36^0 = 18^0$.

Xét hai tam giác vuông ΔMBO và ΔMBI có:

BM chung

$\hat{B}_2 = \frac{1}{2}\hat{B} = 18^0 = \hat{B}_1$

do đó ΔMBO = ΔMBI (cạnh góc vuông – góc nhọn), suy ra: MO = MI

Vậy, BC là đường trung trực của OI.

Chú ý: 1. Để tránh được sai sót khi vẽ hình, các em học sinh cần nhớ với ΔABC có $\hat{A} > 90^0$ thì O ở ngoài ΔABC.

2. Các em học sinh hãy trình bày lại lời giải trên dựa trên tính chất đường trung trực.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa đường trung trực của tam giác. Tại sao mỗi tam giác chỉ có đúng ba đường trung trực ?

Câu hỏi 2: Phát biểu và chứng minh tính chất của ba đường trung trực của một tam giác.

Câu hỏi 3: Trọng tâm của tam giác đều có cách đều ba đỉnh của nó không ? Vì sao ?

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho ΔABC. Tìm một điểm O cách đều ba điểm A, B, C. Có bao nhiêu điểm như vậy.

Bài tập 2. Chứng minh rằng điểm cách đều ba đỉnh của một tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền của tam giác đó.

Bài tập 3. Chứng minh rằng nếu một tam giác có một đường trung trực đồng thời là đường trung tuyến thì tam giác đó là tam giác cân.

Bài tập 4. Chứng minh rằng nếu một tam giác có một đường trung trực đồng thời là đường phân giác thì tam giác đó là tam giác cân.

Bài tập 5. Xác định dạng của ΔABC, biết giao điểm của ba đường trung trực, giao điểm của ba đường phân giác và điểm A thẳng hàng.

Bài tập 6. Xác định dạng của ΔABC, biết giao điểm của ba đường trung trực và giao điểm của ba đường phân giác trùng nhau.

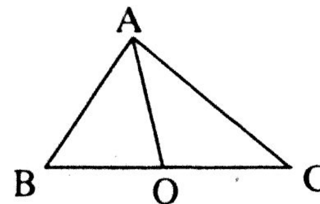
Bài tập 7. Xác định dạng của ΔABC, biết giao điểm của ba đường trung trực và giao điểm của ba đường trung tuyến trùng nhau.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. O là giao điểm của đường trung trực cạnh AB và đường trung trực cạnh AC. Có duy nhất một điểm O thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 2. Xét ΔABC vuông tại A, gọi O là trung điểm của BC.

Vì AO là trung tuyến thuộc cạnh huyền nên:



$$OA = \frac{1}{2}BC \Leftrightarrow OA = OB = OC$$

$\Leftrightarrow$ O cách đều ba đỉnh A, B, C.

Bài tập 3. Sử dụng tính chất đường trung trực.

Bài tập 4. Sử dụng tính chất đường trung trực.

Bài tập 5. Gọi I là giao điểm của ba đường phân giác, suy ra giao điểm của ba đường trung trực thuộc AI nên AI là đường trung trực của BC, suy ra ΔABC cân tại A.

Bài tập 6. ΔABC đều.

Bài tập 7. ΔABC đều.



TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

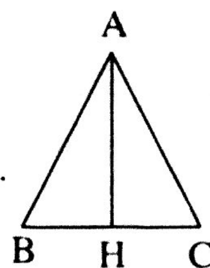
Ta có định nghĩa:

- *Trong một tam giác, đoạn vuông góc kẻ từ một đỉnh đến đường thẳng chứa cạnh đối diện gọi là đường cao của tam giác đó.*
- *Mỗi tam giác có ba đường cao.*

Chú ý: Chúng ta đã có được kết quả:

" Trong tam giác cân đường cao thuộc cạnh đáy thì cũng là đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực ".

Thí dụ 1: Cho ΔABC có $AB = AC = 13cm$, $BC = 10cm$. Tính độ dài đường cao AH.



Giải

Với giả thiết: $AB = AC \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại A $\Rightarrow BH = \frac{1}{2}BC = 5cm$.

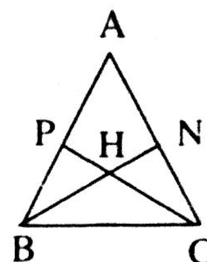
Trong tam giác vuông ΔABH, ta có:

$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Leftrightarrow AH = 12cm$.

Vậy, độ dài đường cao $AH = 12cm$.

Thí dụ 2: Cho ΔABC, có các đường cao BN, CP bằng nhau. Chứng minh rằng ΔABC cân.

Giải



Xét hai tam giác vuông ΔBNC và ΔCPB, ta có:

BC chung

$BN = CP$, giả thiết

suy ra:

$\Delta BNC = \Delta CPB$ (cạnh góc vuông – cạnh huyền)

$\Rightarrow \widehat{BCN} = \widehat{CBP} \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

Nhận xét: Qua thí dụ trên, ta có được kết quả:

" Một tam giác có hai đường cao bằng nhau thì tam giác đó cân "

2. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

Chúng ta đã biết được " *Ba đường trung tuyến, ba đường phân giác, ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm* " và câu hỏi đặt ra là " *Ba đường cao của tam giác có tính chất này không ?* ", câu trả lời là có. Ta thừa nhận kết quả này:

> *Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó được gọi là trực tâm của tam giác.*

Như vậy, trong ΔABC, các đường cao AM, BN, CP cùng đi qua điểm H (hay còn gọi là đồng quy tại điểm H). Điểm H gọi là trực tâm của ΔABC.

Nhận xét:
1. Để xác định trực tâm H của ΔABC ta kẻ hai đường cao, và khi đó giao điểm của chúng là trực tâm H.
2. Nếu H là trực tâm ΔABC thì các tia AH, BH, CH sẽ vuông góc với cạnh đối diện.

Thí dụ 3: Vẽ trực tâm ΔABC trong các trường hợp:

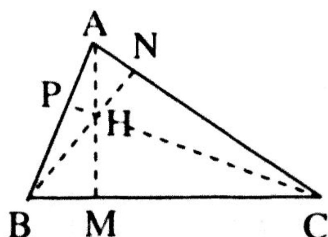
a. ΔABC nhọn.

b. ΔABC vuông tại A.

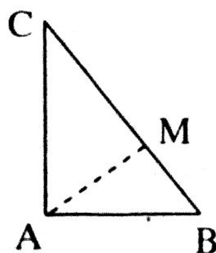
c. ΔABC có $\widehat{A} > 90^0$.

Giải

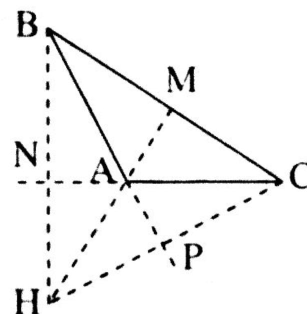
Ta có được các hình vẽ sau:



ΔABC nhọn



ΔABC vuông tại A



ΔABC có $\hat{A} > 90^0$

Nhận xét: Qua thí dụ trên, ta có được nhận xét:
- Nếu ΔABC nhọn thì trực tâm H ở bên trong ΔABC.
- Nếu ΔABC vuông tại A thì trực tâm H ≡ A.
- Nếu ΔABC có $\hat{A} > 90^0$ thì trực tâm H ở bên ngoài ΔABC.

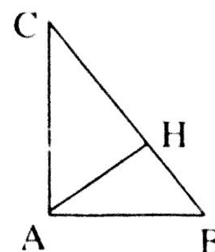
Thí dụ sau sẽ chứng minh nhận xét thứ hai và việc vận dụng nó để xác định trực tâm.

Thí dụ 4: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH.

a. Chứng minh rằng A là trực tâm của tam giác ΔABC.

b. Tìm trực tâm của các tam giác ΔABH, ΔACH.

Giải



a. Vì ΔABC vuông tại A nên:

AB ⊥ AC ⇒ AB là một đường cao.

AC ⊥ AB ⇒ AC là một đường cao.

Hai đường cao AB, AC cắt nhau tại A, suy ra A là trực tâm của tam giác ΔABC.

b. Nhận xét rằng:

- ΔABH vuông tại H nên H chính là trực tâm của nó.
- ΔACH vuông tại H nên H chính là trực tâm của nó.

Nhận xét: Qua thí dụ trên, ta có được nhận xét:

" *Nếu một tam giác có trực tâm trùng với một đỉnh thì tam giác đó là tam giác vuông* ".

3. VỀ CÁC ĐƯỜNG CAO, TRUNG TUYẾN, TRUNG TRỰC, PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC CÂN

Từ các kiến thức đã thu nhận được trong các chủ đề trước, chúng ta có được tính chất của tam giác cân như sau:

1. *Trong một tam giác cân, đường trung trực ứng với cạnh đáy đồng thời là đường phân giác, đường trung tuyến và đường cao cùng xuất phát từ đỉnh đối diện với cạnh đó.*
2. *Trong một tam giác, nếu hai trong bốn loại đường (đường trung tuyến, đường phân giác, đường cao cùng xuất phát từ một đỉnh và đường trung trực ứng với cạnh đối diện của đỉnh này) trùng nhau thì tam giác đó là một tam giác cân.*

Từ đó suy ra được tính chất cho tam giác đều, như sau:

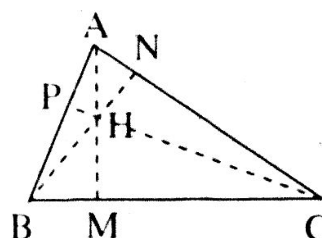
Trong một tam giác đều, trọng tâm, trực tâm, điểm cách đều ba đỉnh, điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh là bốn điểm trùng nhau.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, trực tâm H. Tìm trực tâm của các tam giác ΔABH, ΔACH, ΔBCH.

Giải

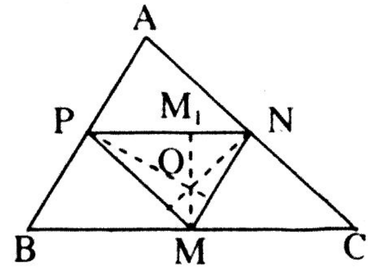
Ta nhận thấy ngay:



- ΔABH nhận C làm trực tâm.
- ΔACH nhận B làm trực tâm.
- ΔBCH nhận A làm trực tâm.

Ví dụ 2: Cho ΔABC, gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BC, AC, AB. Chứng tỏ rằng các đường cao của ΔMNP là các đường trung trực của ΔABC.

Giải



- Với đường cao MM_1 của ΔMNP, ta có: $MM_1 \perp NP$

  Vì N, P theo thứ tự là trung điểm của AC, AB,

  suy ra: $NP // BC \Rightarrow MM_1 \perp BC$

  Vậy, MM_1 là đường trung trực của ΔABC.

- Tương tự, ta cũng có NN_1, PP_1 là đường trung trực của ΔABC.

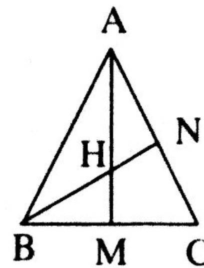
  Vậy, các đường cao của ΔMNP là đường trung trực của ΔABC.

Ví dụ 3: Cho ΔABC cân tại A, gọi M là trung điểm BC. Kẻ đường cao BN ($N \in AC$) cắt AM tại H.

a. Chứng minh rằng $CH \perp AB$.

b. Tính số đo các góc $\widehat{BHM}$, $\widehat{MHN}$, biết $\widehat{C} = 40^0$.

Giải



a. Ta có nhận xét: $AM \perp BC$, vì ΔABC cân tại A

suy ra H là trực tâm ΔABC, do đó $CH \perp AB$.

b. Trong ΔCAN vuông tại N, ta có:

$$\widehat{MBH} = 90^0 - \widehat{C} = 90^0 - 40^0 = 50^0.$$

Trong ΔBHM vuông tại M, ta có:

$$\widehat{BHM} = 90^0 - \widehat{MBH} = 90^0 - 50^0 = 40^0$$

$$\Rightarrow \widehat{MHN} = 180^0 - \widehat{BHM} = 180^0 - 40^0 = 140^0.$$

Vậy, ta tìm được $\widehat{BHM} = 40^0$, $\widehat{MHN} = 140^0$.

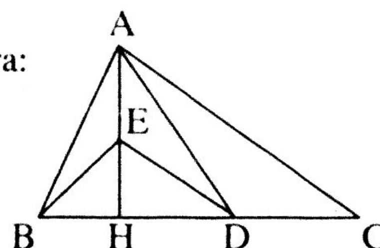
Chú ý: Chúng ta có thể suy ra ngay được số đo của các góc $\widehat{BHM}$, $\widehat{MHN}$ bằng nhận xét về góc có cạnh tương ứng vuông góc, cụ thể:

$\widehat{BHM} = \widehat{C} = 40^0$, vì là hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc.

$\widehat{BHM} = 180^0 - \widehat{C} = 140^0$, vì là hai có cạnh tương ứng vuông góc và ở đó 1 góc nhọn và 1 góc tù.

Ví dụ 4: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D, E theo thứ tự là trung điểm của HC, HA. Chứng minh rằng $BE \perp AD$.

Giải



Vì D, E theo thứ tự là trung điểm của HC, HA, suy ra:

DE // AC

AC ⊥ AB

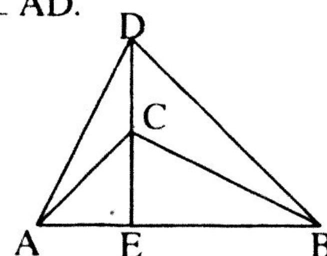
suy ra DE ⊥ AB.

Trong ΔABD, ta có:

AH ⊥ BD và DE ⊥ AB ⇒ E là trực tâm của ΔABD ⇒ BE ⊥ AD.

Ví dụ 5: Cho ΔABC, có $\widehat{A} = 45^0$ và AC < BC, đường cao CE. Trên tia đối của ti CE lấy điểm D sao cho EB = ED. Chứng minh rằng BC ⊥ AD.

Giải



Xét ΔBDE vuông tại E, ta có:

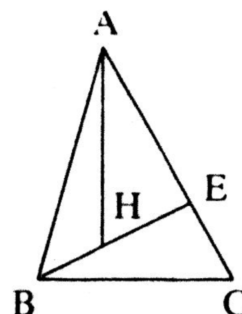
EB = ED ⇔ ΔBDE cân ⇒ $E\hat{B}D = 45^0$.

Suy ra: $\widehat{CAE} + \widehat{EBD} = 45^0 + 45^0 = 90^0$ ⇒ AC ⊥ BD.

Trong ΔABD, ta có: AC ⊥ BD và DE ⊥ AB ⇒ C là trực tâm ⇒ BC ⊥ AD, đpcm

Ví dụ 6: Cho ΔABC, có $\widehat{A} = 45^0$ và trực tâm H. Chứng minh rằng BC = AH.

Giải



Giả sử BH cắt AC tại E.

Xét ΔABE vuông tại E, ta có:

$\widehat{A} = 45^0$ ⇔ ΔABE vuông cân ⇒ AE = BE.

Xét hai tam giác vuông ΔAEH và ΔBEC, ta có:

AE = BE

$E\hat{A}H = \widehat{EBC}$, góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc

suy ra: ΔAEH = ΔBEC (cạnh góc vuông – góc nhọn) ⇒ AH = BC.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa đường cao của tam giác. Tại sao mỗi tam giác cl có đúng ba đường cao ?

Câu hỏi 2: Vẽ trực tâm ΔABC trong các trường hợp:

a. ΔABC nhọn.

b. ΔABC vuông tại B.

c. ΔABC có góc B tù.

Câu hỏi 4: Phát biểu tính chất của ba đường cao của một tam giác.

Câu hỏi 5: Trực tâm của tam giác đều có cách đều ba đỉnh của nó không? Vì sao'

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại : (04) 9 714898 – (04) 9 724770 – Fax: (04) 9 714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc : **PHÙNG QUỐC BẢO**
Tổng biên tập : **NGUYỄN BÁ THÀNH**

Biên tập
NS. Bình Thạnh

Chế bản
NS. Bình Thạnh

Trình bày bìa
Xuân Duyên

Tổng phát hành : Công ty TNHH DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT
Địa chỉ :
2bisA Đinh Tiên Hoàng - P.Đakao - Q.1 - TP.HCM
ĐT : 08 9111564 - Fax : 08 9102915
Email: binhthanhbookstore@yahoo.com

ĐỂ HỌC TỐT TOÁN 7 TẬP 2
Mã số : 1L – 249 ĐH2007
In 3.000 cuốn, khổ 16x24 cm, tại Công ty in VIỆT HƯNG.
Số xuất bản : 769 – 2007/CXB/05 – 114/ĐHQGHN ngày 21/09/2007.
Quyết định xuất bản số : 577 LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2008.